[115] Geometrische Unterrichtsgespräche von Johann Andreas Christian Michelsen (1749–1797)

In: Thomas Krohn und Silvia Schöneburg (Hrsg.), Mathematik von einst für jetzt, Festschrift für Karin Richter, Hildesheim (Franzbecker) 216, 87-102

Einleitung

Zu den klassischen Unterrichtsformen gehören *Unterrichtsgespräche*. Sie lassen sich auf die *sokratischen Dialoge* von Platon zurückführen, von denen der berühmte Dialog über die Verdopplung des Quadrats als Vorlage für das Lehren von Mathematik didaktisch immer wieder diskutiert wird (Vollrath/Roth 2012, S. 122–124). Ausführliche Darstellungen von mathematischen Unterrichtsgesprächen zur Einführung in die Ebene Geometrie und die Arithmetik wurden von Johann Andreas Christian Michelsen (1749–1797) verfasst (Michelsen 1781–1784 und Michelsen 1784). Diese Darstellungen haben einen Umfang von insgesamt etwa 1200 Seiten (Oktav) in deutscher Sprache. Angesichts dieses Umfangs kann es hier nur darum gehen, auf diese Arbeiten als didaktische Quellen hinzuweisen und einige didaktische Aspekte herauszuarbeiten. Ich greife dabei Gedanken auf, die mich schon als Lehrer beschäftigten (Vollrath 1968) und auf die ich dann in historischen Studien hin und wieder gestoßen bin. Erst jüngst entdeckte ich einen Dialog von Leibniz zur Einführung in die Arithmetik und Algebra (Leibniz 1976). In dieser Arbeit beschränke ich mich jedoch auf die Unterrichtsgespräche zur Geometrie (etwa 700 Seiten). Man kann sie als einen Versuch betrachten, die „starren" *Elemente* des Euklid (Euklid 1962) mit den Gesprächen didaktisch „lebendig" werden zu lassen. Michelsen spricht von einem „Versuch". Mit einer didaktischen Analyse will ich untersuchen, wie dieser sich aus heutiger Sicht darstellt.

1 Johann Andreas Christian Michelsen

Als Johann Andreas Christian Michelsen (vgl. Abb. 1) seine Bücher über die sokratischen Gespräche schrieb, war er Professor am Berlinisch-Köllnischen Gymnasium zum Grauen Kloster. Er war am 6. Juni 1749 in Quedlinburg im

Harz geboren und hatte nach dem Besuch des Gymnasiums 1769 in Halle mit dem Studium der Theologie begonnen, zugleich unterrichtete er im dortigen Waisenhaus Mathematik in den unteren Klassen (Cantor 1885). 1772 kam er als Hofmeister nach Brandenburg, wo er 1775 die Aufmerksamkeit des Direktors des Gymnasiums zum Grauen Klosters in Berlin erregte. Dieser berief ihn 1778 auf eine Professur an seinem Gymnasium. 1778 legte er in Halle das Magisterexamen mit seiner Abhandlung über die sokratische Methode ab.

Abb.1 Johann Andreas Christian Michelsen, nach einem Pastell von Johann Christian Heineken, gestochen 1796 von Johann Samuel Ludwig Halle

Michelsen übernahm auch Verantwortung in der Verwaltung des Gymnasiums, an dem er bis an sein frühes Lebensende blieb. Er veröffentliche neben den *Versuchen in socratischen Gesprächen* eine Reihe elementarmathematischer Schriften. Im Jahr 1791 erschien von ihm eine kommentierte Ausgabe von Euklids *Elementen* (Michelsen 1791). Seine Übersetzungen zur Analysis von Leonhard Euler ins Deutsche in den Jahren von 1788–1793 (z. B. Michelsen 1788) führten 1793 zur Aufnahme in die Berliner Akademie der Wissenschaften. Er starb am 8. August 1797 in Berlin (Meschkowski 1986, S. 222–223).

2 Zum Charakter des Versuchs

Grundlage unserer Betrachtungen ist das Werk *Versuch in socratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der ebenen Geometrie*, mit drei Fortsetzungen, Berlin (Hesse) 1781–1784. Es liegt mir als ein Buch vor, in dem die vier Bände zusammengebunden sind.

Michelsen spricht von einem „Versuch". Das ist natürlich mehrdeutig. Es kann bedeuten, dass er den Unterricht selbst als einen Versuch betrachtete. Aber es kann sich auch auf die Darstellung beziehen. Werden Pläne für Unterrichtsgespräche dargestellt oder handelt es sich um Unterrichtsprotokolle? Und was wird erwähnt? Dazu versichert der Verfasser in der Vorrede:

> „Die folgenden Gespräche sind größtentheils so, wie sie da stehen, mit Kindern, die noch gar nicht in der Mathematic unterrichtet waren, gehalten worden. Mehrere mir sehr verehrungswürdige Männer, die Augenzeugen von dem Erfolge gewesen, mit welchem ich dergleichen Unterredungen über die ganze ebene Geometrie mit Kindern angestellet habe, haben mich zu ihrer Herausgabe ermuntert. Des gedachten Erfolgs aber ohnerachtet weiß ich nicht, ob meine Folgsamkeit gebilliget werden wird. Ton und Mienen lassen sich nicht beschreiben, und wie sehr kommts auf sie an? Ueberdem wer kann dergleichen Gespräche ohne alle Veränderung hinterher aufsetzen? Einem Versuche verzeiht man indeß leicht" (Michelsen 1781, S.1).

Michelsen berichtet also über den Unterrichtsverlauf und hält sich dabei möglichst eng an das Geschehene. Er weiß, dass die „verehrungswürdigen Männer“ die Möglichkeit haben, das in seinem Buch zu kontrollieren. Unter Umständen hat er sie ja auch Notizen machen lassen, die er verwendete. Da anzunehmen ist, dass er den Unterricht genau geplant und diesen Plan streng eingehalten hat, könnte es sich auch um einen revidierten Plan handeln. Die Notizen sind also wohlwollend, aber auch kritisch zu betrachten.
Formal folgt die Darstellung dem klassischen sokratischen Schema. Und das drückt er ja auch bereits im Titel aus. Folgt man dann den Gesprächen, so wird man von einem *entwickelnden Impulsunterricht* sprechen. Zwar dominiert eine fragend-entwickelnde Gesprächsführung, doch es finden sich auch immer wieder Aufforderungen an den Schüler, so dass es treffender ist, Fragen und Aufforderungen unter dem Begriff des *Impulses* (Vollrath, Roth 20122, S. 131) zusammenzufassen.
Was die Personen anbelangt, so erscheint es sinnvoll, von dem Lehrer L. (Michelsen) und dem Schüler S. (sicher männlich) auszugehen. Obwohl Michelsen in der Vorrede von Kindern (Mehrzahl) spricht, ist wohl doch eher an Einzelunterricht an einem Jugendlichen zu denken. Im Folgenden werden einzelne Unterrichtsschritte an Beispielen didaktisch analysiert, um damit den *Unterrichtsstil* zu beschreiben.

3 Zielangaben

Betrachtet man alle vier Teile des Werks aus dem Blickwinkel des Verzeichnisses am Ende des vierten Teils (Michelsen 1784, S. 143–178), dann erkennt man, dass es Michelsen darum geht, dem Schüler den Inhalt der ersten vier Bücher des Euklid zu vermitteln. Er gibt im Anhang seines Werks für jeden mathematischen Sachverhalt, den er behandelt hat, die entsprechende Stelle aus den *Elementen* an. Wir legen bei den Zitaten im Folgenden eine von Johann Karl Friedrich Hauff übersetzte Ausgabe der

Elemente aus dem Jahr 1797 zu Grunde (Euklid 1797). Ansonsten sei z. B. auf die Ausgabe von Clemens Thaer verwiesen (Euklid 1962).

Aber auch in den einzelnen Unterrichtsgesprächen nennt der Lehrer seinem Schüler mehr oder weniger deutlich seine Ziele, wobei er sich darum bemüht, diese auch zu Zielen des Schülers werden zu lassen, ihn somit zum Lernen von Geometrie zu *motivieren*. Schauen wir uns also gleich den Beginn des Unterrichts – um mit Wagenschein zu sprechen – den *Einstieg* an.

> „S. Ist denn das wirklich wahr, daß man wissen kann, wie hoch ein Thurm ist, ohne denselben zu messen? Ich kann ja nicht einmal wissen, wie hoch unsere Stube ist, wenn ich sie nicht messe.
>
> L. Also würden Sie mir wohl noch weniger glauben, wenn ich sagte, daß man so gar wissen könne, wie hoch von uns bis zur Sonne ist?
>
> S. Das ist ja gar nicht möglich“ (Michelsen 1781, S. 3).

Der Unterricht beginnt mit einer Frage des Schülers. Aber wie kommt dieser darauf? Irgendwo muss er wohl so eine Behauptung aufgeschnappt haben. Hat Michelsen den Schüler zu Beginn nur einfach fragend angesehen? Oder hat er die Behauptung in irgendeiner Form präsentiert? Wie dem auch sei, der Einstieg ist im Prinzip nicht schlecht, wenn man daran denkt, dass „Geometrie“ Erdmessung bedeutet. Der Lehrer bejaht die Frage und setzt mit der Sonnenentfernung sogar noch eins drauf. Der Schüler kann das nicht glauben. Doch der Lehrer versichert ihm, dass das tatsächlich möglich sei, wenn man nur Geometrie könne. Diese zu lernen sei zwar mühsam, doch lohnend, wie der Schüler das ja vom Klavierspiel her wisse. Wird er sein Versprechen am Ende eingelöst haben?

Mit dem Gedankenaustausch zum Nutzen der Mathematik hat der Lehrer seinem Schüler das *Fernziel* des Unterrichts angegeben. Dann kommt der Lehrer zur Sache, indem er das *Nahziel* des ersten Unterrichts nennt.

> „L. Nun gut. Heute wollen wir also von den Linien mit einander reden, und sehen, was wir uns unter einer Linie zu denken haben.

> S. Sollte ich denn das nicht schon wissen? Ich habe ja selbst schon viele Linien, gerade und krumme, gemacht.
> L: Ganz unbekannt sind Ihnen freylich die Linien nicht. Aber können Sie mir auch wohl mit Worten beschreiben, was Sie Sich unter einer Linie denken?
> S. (Nach einigem Nachdenken) Nein, das kann ich doch nicht“ (Michelsen 1781, S. 7–8).

Sollte der Schüler dem Unterricht nach den Versicherungen des Lehrers hoffnungsvoll entgegengesehen haben, dann wird ihm – diesmal konkret – sein Unvermögen gezeigt.
Das hat leider im Mathematikunterricht eine lange Tradition: Dem Schüler wird sein Unvermögen bewusst gemacht, und das soll ihn für die Mathematik motivieren. Doch das ist nur die eine Seite. Der Lehrer schildert seinem Schüler in leuchtenden Farben, welchen Nutzen er aus dem Lernen der Geometrie ziehen kann. Er preist die Mathematik mit folgenden Worten an:

> „L. Die Mathematic enthält eine Menge höchst brauchbarer und wichtiger Kenntnisse, und mit diesen Schätzen überhäuft sie den, den sie einmal lieb gewonnen, je länger je mehr, ohne gleichwohl sich je zu erschöpfen. Daher kann man auch, so bald man unter die Lieblinge der Mathematic aufgenommen ist, diese Wissenschaft nie aufhören zu rühmen und zu lieben“ (Michelsen 1781, S. 6).

Er lässt keinen Zweifel daran, dass er sich selbst zu diesen Lieblingen zählt und dass er hofft, dass sein Schüler durch den Unterricht auch zu einem solchen erwählt wird. Auf dem Weg dort hin spart er nicht mit Lob für erbrachte Leistungen und Ermutigungen für weitere Arbeiten, um das angestrebte Ziel zu erreichen.

4 Erarbeiten von Sachwissen

Im ersten Teil geht es um die Grundbegriffe der Geometrie: Linie, Länge, Breite, gerade Linie, krumme Linie, Richtung, Fläche, ebene Fläche, krumme Fläche, Winkel, Figur, Kreis, Dreieck, Viereck usw. Mit den Definitionen all dieser Begriffe beginnen ja auch die *Elemente* des Euklid. Sie werden dort einfach mitgeteilt. Im Unterricht wird Sachwissen *erarbeitet*. Deshalb soll und kann der Lehrer im Unterrichtsgespräch an *Erfahrungen* und *Beobachtungen* des Schülers anknüpfen. Dieser kennt ja die Wörter und verbindet mit ihnen *Vorstellungen*, die aus Beobachtungen erwachsen sind. Der Lehrer greift das auf und versucht nun, die für die Definition relevanten Vorstellungen hervorzuheben. Es geht also um die Erarbeitung einer Erklärung (Definition) für den Begriff der Linie.

> „L. […] Sagen Sie mir also, können Sie Sich wohl eine Linie vorstellen, ohne sich dabey eine Länge oder etwas langes zu denken?
> S. Nein.
> L. Was gehört also nothwendig zu einer Linie?
> S. Eine Länge.
> L. Recht. — Müssen Sie Sich nicht aber auch, wenn Sie eine Länge Sich vorstellen wollen, eine Breite denken?“ (Michelsen 1781, S. 8).

Natürlich steuert der Lehrer auf Euklids Definition zu: „Eine Linie ist Länge ohne Breite“ (Euklid 1797, S. 1). Er erreicht sie auch tatsächlich, mit enger Führung. Interessant ist, dass Michelsen – anders als Euklid – Punkte nicht für erklärungsbedürftig hält. Er verzichtet auch darauf hinzuweisen, dass Linien durch Punkte begrenzt sind. Wenn von geraden Linien die Rede ist, dann ist also nach unserem Verständnis an Strecken zu denken, die bis ins Unendliche verlängert werden können.

Wo es möglich ist, knüpft der Lehrer an Kenntnisse und Erfahrungen des Schülers an, die er im Sinne des angestrebten Ziels korrigiert oder ergänzt. Er gibt auch *Erläuterungen*, die unter Umständen recht ausführlich sind.

5 Handeln

In den *Elementen* geht es nach den Definitionen dann darum, Möglichkeiten des Handelns mit den definierten Objekten aufzuzeigen. Das geschieht zunächst mit den Postulaten (Forderungen), später bei den Problemen (Aufgaben) mit den Konstruktionen. In der Geometrie sind *Konstruktionen* die Handlungen.

Im Unterrichtsgespräch knüpft der Lehrer an vertraute Handlungen des Schülers an. So erinnert er ihn daran, wie er einen Kreis mit einem Stock in den Sand gezeichnet hat (Michelsen 1781, S. 48). Er zeigt ihm dann einen Zirkel, zeichnet damit einen Kreis und lässt auch den Schüler damit zeichnen. Nach dem *Vormachen* durch den Lehrer lernt dieser beim *Nachmachen* den Umgang mit dem Instrument. Durch *Aufforderungen* zum Ausprobieren bekommt der Schüler die Möglichkeit, neue Erfahrungen zu sammeln.

In den *Elementen* geht es bei den Konstruktionsaufgaben und bei den Sätzen um gedachte Figuren, auch darum, wie man sie erzeugen kann. Über die konkreten Werkzeuge äußert sich Euklid nicht. Immerhin finden sich aber in den *Elementen* Zeichnungen. Auch der Schüler lernt im weiteren Verlauf zunehmend aus fertigen Zeichnungen, die vom Lehrer vorgelegt werden.

Handlungen kann der Schüler jedoch auch an konkreten Objekten vollziehen, etwa wenn gezeichnete Dreiecke aus Papier ausgeschnitten und aufeinandergelegt werden, um zu kontrollieren, ob sie sich decken können (Michelsen 1781, S. 71).

6 Entdecken

Beim eigenen Handeln kann der Schüler *Handlungsspielräume* und *Sachzwänge* erfahren. Der Lehrer formuliert sie als *Regeln,* die er dem Schüler mitteilt. Das sind zunächst die Postulate, später sind es die Lösungen der Probleme. In den *Elementen* ist das erste Problem: „Auf einer gegebenen begränzten geraden Linie ein gleichseitiges Dreyeck zu beschreiben“ (Euklid 1797, S. 5). Euklid stellt erst das Problem dar und gibt dann die Lösung an. Michelsen macht das anders. Er zeigt dem Schüler Fig. 32 (vgl. Abb. 2) und lädt ihn ein, jetzt die gelernten Regeln anzuwenden.

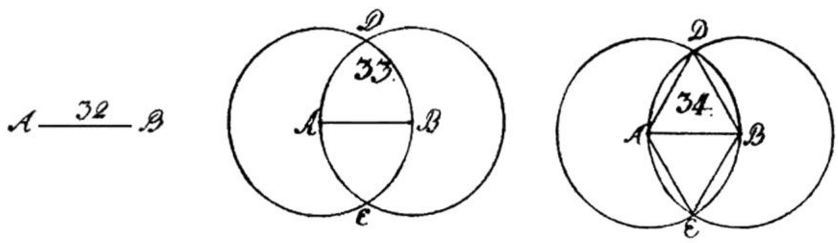

Abb. 2 Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks mit gegebener Seitenlänge aus (Michelsen 1781, Anhang)

> „L. […] Nun betrachten Sie Fig. 32 die Linie AB. Wie könnten Sie dabey wohl die gelernten Vorschriften befolgen?
> S. Ich könnte die Linie verlängern.
> L. Was mehr.
> S. (Besinnt sich, findet aber nichts)
> L. Ist Ihnen blos eine Linie gegeben, oder auch Punkte?
> S. Auch die Punkte A und B.
> L. Und nun?“ (Michelsen 1781, S. 60).

Der Schüler schlägt zunächst vor, die Linie zu verlängern. Der Lehrer geht nicht darauf ein, sondern will mehr. Im Grunde gibt es ja unzählige Möglichkeiten. Der Schüler ist ratlos. Der Lehrer lenkt die Aufmerksamkeit auf die Endpunkte der Strecke. Und nun versucht es der Schüler doch tatsächlich mit dem Vorschlag, um A und B Kreise mit dem Halbmesser AB zu zeichnen. Dabei kommt Fig. 33 (vgl. Abb. 2) heraus. Der Lehrer weist ihn auf die Schnittpunkte D und E hin und fragt, was man nun tun könne. Der Schüler schlägt vor, von D und E nach A und B gerade Linien zu ziehen. So entsteht Fig. 34 (vgl. Abb. 2). An eine Verbindungslinie von D nach E hat er nicht gedacht. In etlichen Fragen erreicht der Lehrer bei seinem Schüler die Einsicht, dass alle diese Linien gleich lang sind.
Doch warum hatte der Lehrer die erste Antwort des Schülers nicht aufgegriffen? Weil er ein Ziel hatte, das der Schüler aber nicht kennen konnte. Und ist der Schüler dann wirklich selbst auf die vom Lehrer erwünschte Antwort gekommen? Auch dieses Vorgehen in einer *engen Führung* hat im Unterricht eine lange Tradition und ist eine der grundlegenden Schwächen des *fragend-entwickelnden* Unterrichts.
Aber es kommt noch schlimmer. Nachdem der Schüler schließlich an Fig. 34 erkannt hat, dass die Dreiecke ADB und ABE gleichseitig sind, fragt der Lehrer: „Wie macht man also wohl ein gleichseitiges Dreyeck?“ (Michelsen 1781, S. 62). In wohlgesetzten Worten formuliert der Schüler nun die Lösung im Stil der *Elemente*.
Hier ist jeder Befürworter des *Problemlösens* im Unterricht enttäuscht. Der Schüler wird um das Spannendste betrogen. Aber er weiß jetzt wenigstens, wie es geht. Dass er das dann formvollendet beschreiben kann, lässt einen an der Authentizität der Schilderung zweifeln. (Aber natürlich wollte Michelsen seinen Schüler nicht bloßstellen).
Doch gemach! Immerhin hat der Schüler bei starker Führung seines Lehrers einen interessanten Sachverhalt entdeckt: Offensichtlich hat *geführtes entdeckendes Lernen* stattgefunden. Das lässt sich durchaus positiv sehen,

zumal hier dem Schüler die mit dem Problemlösen zwangsläufig verbundenen Frustrationen erspart geblieben sind. Und schließlich stecken in der Fig. 34 ja auch weitere wichtige Sachverhalte, die es zu entdecken gibt: Wäre auch noch die gerade Linie DE eingezeichnet, könnte man das Halbieren einer Strecke und das Konstruieren der Mittelsenkrechten einer Strecke entdecken. Diese Sachverhalte werden allerdings – wie bei Euklid – aus gutem Grund erst später behandelt (Michelsen 1782).

7 Reflektieren

Der Lehrer hätte dem Schüler ja auch mehr Spielraum zum Entdecken lassen können, wenn er etwas offener gefragt hätte: „Und was haben wir jetzt mit dieser Figur erreicht?“ Das sollte im Unterricht zum Abschluss einer Betrachtung durch *Reflexion* geschehen. Michelsen zeigt in seinen Gesprächen eine interessante Möglichkeit der Reflexion: Er fordert den Schüler auf, einen *Brief* an seinen Vater über das bisher Gelernte zu schreiben. Und das hat der Schüler getan.

„Bester Vater!

> Mein Lehrer hat diese Woche mit mir etwas neues angefangen, ich lerne nun Mathematic. Dreymal hat er schon mit mir über verschiedene Dinge daraus gesprochen, und ich soll nun alles das aufsetzen, was wir gehabt haben. Er gab mir den Rath, ich sollte mir nur vorstellen, daß ichs jemanden erzählen wollte, und ich schreibe es Ihnen, denn Ihnen habe ich ja oft erzählen müssen, was ich getrieben hatte. Das erstemal sprachen wir von Linien. Wenn ich mir eine Linie vorstelle, so denke ich mir blos eine Länge, denn eine Linie ist eine Länge ohne Breite. Es giebt einfache Linien und zusammengesetzte. Die einfachen sind entweder gerade oder krumm. Die geraden Linien haben nur eine Richtung, die krummen aber alle Augenblick eine andere“ (Michelsen 1781, S. 51).

Der Brief an den Vater hat also die gleiche Funktion, wie sie etwa Martin Wagenschein im *mathematischen Aufsatz* (Wagenschein 19702, S. 167–172) oder Peter Gallin und Urs Ruf in den *Tagebucheinträgen* (Gallin/Ruf 1993) sehen. Später lässt auch Michelsen den Schüler Aufsätze über das Gelernte schreiben, die er (in korrigierter Form) abdruckt.
Während die Zielangaben im Unterricht in die Zukunft weisen, wird mit den Reflexionen die Vergangenheit in den Blick genommen. Rein äußerlich handelt es sich häufig um *Wiederholungen*. Bemerkenswert ist auch, dass der Lehrer in der Regel seine didaktischen Maßnahmen dem Schüler begründet. Und aus den angeführten Kommentaren des Schülers kann man entnehmen, dass er sie einsieht. (Er ist eben ein „Musterschüler“!)
Doch der Lehrer kommentiert auch das Ergebnis und den Weg, auf dem man zu ihm gelangt ist. Diese Erläuterungen dienen nicht nur der *Sicherung*, sondern auch der *Vertiefung* des Gelernten. Denn dabei geht es nicht nur um die Gegenstände und Sachverhalte, sondern auch um das Erkennen typisch mathematischer Methoden, also um mathematisches *Metawissen*.

8 Urteilen

In den *Elementen* geht es in den Axiomen (Grundsätzen) und in den Theoremen (Lehrsätzen) darum, über geometrische Objekte zu urteilen, z. B. ob zwei Objekte gleich, verschieden oder ähnlich sind. Das ist bei Euklid für die Gleichheit durch das Axiom geregelt: „Dinge, die einander decken, sind einander gleich“ (Euklid 1797, S. 4). Wenn also Euklid von gleichen Längen, Winkeln oder Dreiecken spricht, dann ist damit Kongruenz (Deckungsgleichheit) gemeint. Und auch bei Michelsen findet sich eine entsprechende Regel im vierten Gespräch. Im fünften Gespräch geht es um die Gleichheit (Kongruenz) von Dreiecken. Wie in den *Elementen* wird auch bei Michelsen als erster Satz der „Kongruenzsatz SWS“ bewiesen. Dort kündigt der Lehrer zu Beginn an, dass es darum geht, festzustellen, woran man erkennt, ob zwei Dreiecke (vgl. Abb. 3) gleich sind. Wir übernehmen im Folgenden diese Redewendung.

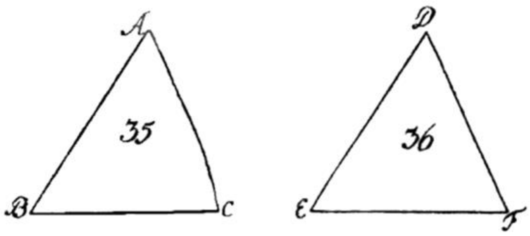

Abb. 3 Vergleich zweier fast deckungsgleicher Dreiecke aus (Michelsen 1781, Anhang)

Der Lehrer wird dann konkret:

> „L. […] Betrachten Sie also die beyden Dreyecke Fig. 35 und 36, und sagen Sie mir, wie Ihnen dieselben beschaffen zu seyn scheinen.
> S. Gleich.
> L. Sind sie es auch wirklich?
> S. Ja.
> L. Was meinen Sie wohl von diesen beyden Dreyecken? (Der Lehrer zeigt zwey papierne Dreyecke, welche den Fig. 35 und 36 ähnlich sind, davon aber das eine zwey um etwas weniges kleinere Seiten hat als das andere, so daß man es nur erst nach einer sorgfältigen Vergleichung wahrnimmt.
> S. Sie sind auch gleich.
> L. Wirklich?
> S. O ja! denn sehen Sie nur. (Der Lehrling versucht, die beyden gedachten Dreyecke so auf einander zu legen, daß sie sich decken, findet aber nun, daß das eine größer ist, als das andere.) Nein, diese Dreyecke sind doch ungleich.

> L. Nicht wahr, der Schein hat Sie verführt? Trauen Sie ja künftig dem Scheine nicht sogleich, er betriegt oft, und außerdem muß man auch in der Mathematic von allem, was man behauptet, Rechenschaft zu geben im Stande seyn, und dazu setzt uns der bloße Schein nicht in den Stand. Indeß kann doch auch oft auf der andern Seite der Schein uns nützlich werden, wenn wir nemlich dabey auch untersuchen, ob etwas wirklich so sey, als es scheinet; und so wollen wir es künftig, und so müssen wir es auch machen. — — Sind also die beyden Dreyecke Fig. 35 und gleich?“
> (Michelsen 1781, S. 71–72).

Die Ausgangsfrage des Lehrers provoziert ein Urteil des Schülers. So wie die Aufgabe gestellt ist, kann das Urteil nur *anschaulich* gefällt werden. Und das tut der Schüler dann auch, und es ist ja nicht mal falsch. Doch der Lehrer nährt Zweifel und zeigt zwei papierene Dreiecke, die nur scheinbar kongruent sind (die rechte Linie in Fig. 35 von Abb. 3 ist im Druck natürlich gerade!), und verführt den Schüler zu einem Fehlurteil. Es ist wiederum ein traditioneller Ansatz im Unterricht, das Vertrauen in die Anschauung zu erschüttern und damit das Beweisen zu motivieren.

Der Lehrer lässt nun den Schüler die Dreiecke so aufeinander legen, dass zunächst A auf D und B auf E fallen. Damit fallen AB und DE aufeinander, sind also gleich. Dann wird der Winkel BAC so auf den Winkel EDF gelegt, dass der Scheitel A auf den Scheitel D, der Schenkel AB auf den Schenkel DE und der Schenkel AC auf den Schenkel DF passt. Damit sind auch die Winkel gleich. Der dritte Eckpunkt C muss auf F fallen, da auch die Seite AC auf die Seite DF passen muss. Damit müssen dann aber auch die Seite BC auf EF, der Winkel ACB auf DFE und der Winkel CBA auf FED fallen. Die Dreiecke passen also in allen Teilen aufeinander, sind also gleich.

Der „Beweis“ von Euklid ist nicht stichhaltig, weil nicht geregelt ist, wie man feststellt, was „einander deckt“. Hilbert hat deshalb in seinen *Grundlagen der Geometrie* diesen Sachverhalt in die Axiome der Kongruenz aufgenommen

(Hilbert 1977, S. 14). Bei Michelsen wird immerhin in seinen Regeln geklärt, dass man die fraglichen Objekte zum Prüfen in Gedanken aufeinander legt (Michelsen 1781, S. 69–70).

9 Argumentieren

Problemlösungen und Theoreme sind zu begründen. Als *Argumente* gelten Sachverhalte, die als richtig angenommen oder bereits begründet sind. So entstehen Beweise. In der Theorie ergeben sich dabei deduktiv aufgebaute Systeme von Aufgaben und Sätzen.

Sowohl bei den Konstruktionen als auch bei den Sätzen spielen Figuren eine wichtige Rolle. Sie dienen einerseits zur Darstellung der entsprechenden Konfigurationen, andererseits auch zur Veranschaulichung der Sachverhalte. Bei Michelsen befinden sich die Figuren als Kupferstiche nummeriert jeweils auf Abbildungsblättern im Anhang. Er lässt Figuren erkunden und an ihnen argumentieren. Argumente werden akzeptiert, wenn sie sich auf Regeln oder bereits begründete Sachverhalte stützen. *Argumentationsketten* liefern dann *Beweise*.

Das gilt im Prinzip auch für indirekte Beweise. In den *Elementen* findet sich das erste Beispiel für einen indirekten Beweis bei der Umkehrung des Satzes: „In gleichschenklichten Dreyecken sind die Winkel an der Grundlinie […] einander gleich“ (Euklid 1797, S. 8). Das ist auch bei Michelsen so.

> „L. Wir haben neulich gelernt, und sie haben es auch unter den aufgeschriebenen Sätzen bemerkt, daß in jedem Dreyecke zwey Winkel gleich sind, wenn darin zwey Seiten es sind. Wie denn aber, wenn wir umgekehrt wüßten, daß zwey Winkel in einem Dreyecke gleich wären.
> S. Dann müßten auch darin zwey Seiten gleich seyn.
> L. Und das Dreyeck wäre also, was für eins?
> S. Ein gleichschenkliges.

> L. Ist das so gleich ausgemacht, und dürfen wir es wohl, ohne es erst zu beweisen, behaupten?
> S. O ja! denn wenn in jedem gleichschenkligen Dreyecke zwey Winkel gleich sind, so muß ja auch ein Dreyeck gleichschenklig seyn, wenn es zwey gleiche Winkel hat.
> L. Allein der Satz: Alle Menschen müssen sterben, ist doch wahr?
> S. Ja.
> L. Kann ich aber auch umgekehrt sagen: Alles, was sterben muß, ist ein Mensch?
> S. Nein, denn die Thiere müssen ja auch sterben“ (Michelsen 1781, S. 100–101).

Nun kehrt der Lehrer wieder zum geometrischen Sachverhalt zurück, zeigt dem Schüler ein Dreieck mit zwei gleich großen Winkeln, die ja auch der Schüler erkennt. Auf die Frage, ob bei einem Dreieck mit zwei gleich großen Winkeln auch die gegenüberliegenden Seiten gleich lang sein müssen, reagiert der Schüler vorsichtig: „Das weiß ich noch nicht.“ Darauf entgegnet der Lehrer: „Gesetzt, daß sie nicht gleich wären“ (Michelsen 1781, S. 102) und führt dann den Schüler entsprechend der Argumente des Euklid mit der Annahme eines Dreiecks, bei dem die entsprechenden Seiten verschieden lang sind, auf die Einsicht über das behauptete und das angenommene Dreieck: „Sie müßten gleich seyn. Aber (sich wundernd) das geht ja nicht an, denn sie sind ja offenbar ungleich“ (Michelsen 1781, S. 103). Doch die Konsequenzen zu akzeptieren, dass die Annahme falsch war und damit die Richtigkeit der Behauptung gezeigt ist, bereitet dem Schüler dann doch immer noch einige Schwierigkeiten.
In diesem Beispiel treten mit der Anerkennung der *Beweisbedürftigkeit der Umkehrung eines Satzes* und des *indirekten Beweises* zwei grundlegende Probleme auf, die dem Schüler doch erhebliche Schwierigkeiten bereiten. Man hätte sich hier didaktisch eine „Isolation der Schwierigkeiten“

gewünscht (Vollrath/Roth 20122, S. 195). Im Zusammenhang mit der Umkehrung wäre natürlich zumindest zusätzlich auch ein geometrisches Beispiel zweckmäßig gewesen. Die ausführlicheren Kommentare des Lehrers zu beiden Sachverhalten zeigen, dass sich Michelsen der Probleme bewusst war. So weist er in seinem Euklid-Kommentar in diesem Zusammenhang darauf hin, dass sich dieser Beweis von den vorangegangenen „auf eine merkliche Art“ unterscheidet (Michelsen 1791, S. 35).

Wie in den *Elementen* folgen bei Michelsen nach der Dreieckslehre die Parallelenlehre und danach die Lehre von der Größe von Parallelogrammen und Dreiecken. Wenn jetzt von gleichen Parallelogrammen oder Dreiecken gesprochen wird, so sind damit gleich große Figuren gemeint. Der Lehrer weist seinen Schüler zwar darauf hin, verwendet aber weiter wie die *Elemente* die Redewendung „gleich“ und die Schreibweise mit dem Gleichheitszeichen (Michelsen 1782, S. 133). Dies zeigt den starken Einfluss der berühmten Vorlage trotz offensichtlicher Schwierigkeiten.

In der Parallelenlehre beweist Michelsen die üblichen Sätze aus den *Elementen*, obwohl er bei den von ihm angegebenen Regeln auf das berühmte Parallelenpostulat von Euklid verzichtet hat. Damit versucht er, sich von der Vorlage zu lösen, muss dann allerdings die Anschauung zu Hilfe nehmen. Auf die Problematik weist Meschkowski in seiner Kritik des Beweises von Satz 29 aus (Michelsen 1791) hin (Meschkowski 1965, S. 95–96). Er unterstellt bei Michelsen eine Absicht. Ein Einfluss der damaligen Diskussionen um das Parallelenpostulat (Kröger 2014, S. 218–260) lässt sich für mich bei Michelsen jedoch nicht erkennen.

10 Herleiten

In den *Elementen* werden Sachverhalte systematisch mitgeteilt und begründet. Das hat natürlich auch im Unterricht Spuren hinterlassen, was sich besonders deutlich bei der Darstellung von Sätzen zeigt. Traditionell werden im Unterricht jedoch Sätze im Prinzip auf zwei Wegen gewonnen: Eine

Beobachtung, die zu einer Vermutung führt, wird *bewiesen*, oder ein mehr oder weniger gelenktes Handeln, das schrittweise begründet wird, führt auf einen Satz, der damit *hergeleitet* wird. Im Detail findet sich das auch bei Michelsen in zahlreichen Varianten. Dafür zwei zusammenhängende Beispiele.
Nachdem der Lehrer das Parallelogramm als Viereck definiert hat, bei dem gegenüberliegende Seiten gleich lang sind, weist er auf ein gezeichnetes Parallelogramm ABCD und fordert den Schüler auf:

> „L. […] Diese Erklärung vorausgesetzt, sagen Sie mir: Sind die gegenüber stehende Seiten eines Parallelogramms einander gleich oder nicht? Ist z. B. Fig. 77. AB = CD und AC = BD?
> S. (Besinnt sich eine Zeitlang.) Ja, denn wenn ich die Diagonale AD ziehe, Fig. 78, so ist Δ ACD = Δ ABD“ (Michelsen 1782, S. 126).

Das begründet er mit dem Wechselwinkelsatz. Und aus der Kongruenz der Dreiecke ergibt sich, dass gegenüberliegende Seiten des Parallelogramms als entsprechende Seiten kongruenter Dreiecke gleich lang sind. Damit ist die Vermutung bewiesen.
Zugleich gibt aber die Kongruenz der Dreiecke noch mehr her: Auch gegenüberliegende Winkel im Parallelogramm sind gleich groß. Und zu dieser Einsicht führt der Lehrer anschließend seinen Schüler. Dieser Sachverhalt ist damit hergeleitet. Beide Sachverhalte werden vom Lehrer zu einem Satz zusammengefasst.

11 Ergebnisse

Nachdem Michelsen in Anlehnung an die *Elemente* auch die Kreise behandelt hat, unternimmt er im 4. Band (Michelsen 1784) mit Fragen der Ähnlichkeitslehre einen Ausflug in Buch VI der *Elemente*. Anschließend behandelt er die Quadraturen von Dreiecken, Rechtecken, Parallelogrammen,

regelmäßigen Vielecken und schließlich Kreisen. Bei den Kreisen lehnt er sich an Archimedes an, wenn er zunächst zeigt, dass der Kreis einem rechtwinkligen Dreieck gleich ist, dessen eine Kathete gleich dem Radius und die andere gleich dem Umfang des Kreises ist (Rudio 1892, S. 73–74). Die Ergebnisse drückt Michelsen – für uns ungewohnt – mit Hilfe von *Proportionen* (Verhältnisgleichungen) aus. So wird z. B, festgestellt, dass ein Rechteck mit den Seiten a und b gleich einem Quadrat mit der Seite c ist, die mittlere Proportionale von a und b ist, für die also gilt: a : c = c : b. Ein Kreis ist gleich einem Quadrat mit der Seite a, die mittlere Proportionale zwischen dem halben Umfang U und dem Radius r des Kreises ist, für die also gilt: ½U : a = a : r.
Nachdem der Lehrer seinen Schüler im Hinblick auf die zu bestimmende Turmhöhe gelegentlich vertröstet hat, kann er ihm im letzten Gespräch des 4. Bandes dann doch noch zeigen, wie das mit Hilfe ähnlicher Dreiecke möglich ist. Er verweist auf Fig. 76 (vgl. Abb. 4).

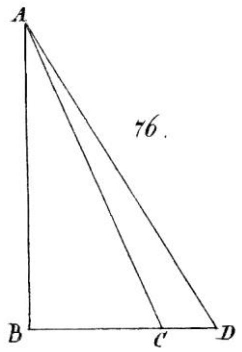

Abb. 4 Bestimmung der Turmhöhe durch Anvisieren der Turmspitze von einer Standlinie aus

> „L. Bey einem Thurme, wo man die beschriebene Horizontallinie messen kann, ist man im Stande, eine Figur wie 76 sich im Großen zu gedenken, der die 76ste Figur ähnlich ist, und wo der einzige statt findende Unterschied bloß in der Größe liegt. Hierauf gründet sich jene Behauptung. Ganz deutlich wird dies Ihnen freylich noch nicht seyn; indeß so wie Sie in der Folge noch bessere Verfahrungsarten kennen lernen werden, so wird auch alle Dunkelheit, welche sich noch findet, immer mehr und mehr verschwinden“ (Michelsen 1684, S. 141–142).

Von den Enden einer Standlinie CD bekannter Länge aus kann man die Turmspitze A anvisieren und erhält dann zwei Winkel bei C und D. Damit kann man ein Dreieck ACD zeichnen, das dem Dreieck in der Natur ähnlich ist. Verlängert man nun die Seite CD über C hinaus und fällt man das Lot von A auf die Verlängerung, so erhält man den Fußpunkt B. Damit ergibt sich Fig. 76 (Abb. 4). Aus ihr kann man die Länge AB ablesen und daraus mit Hilfe des Verkleinerungsmaßstabes die Turmhöhe bestimmen. Das Verfahren erklärt der Lehrer dem Schüler in einem längeren ausführlichen Kommentar und zeigt ihm auch die in der Landvermessung üblichen *Instrumente* Messkette und Winkelmessgerät. Das ist aber nur dem Versprechen geschuldet. Im Grunde genommen spielen die geometrischen Instrumente und die Anwendungen beim Landmessen und Nivellieren im Unterricht keine Rolle. Hier hat sich Michelsen eng an die *Elemente* gehalten. Ähnlich verhält es sich mit dem Verzicht auf die Verwendung der Algebra. Er beschränkt sich z. B. auf die Proportionen, wo sein Berliner Zeitgenosse Abel Bürja (1752–1816) bereits mit *Formeln* arbeitet (Bürja 1787). Bei ihm finden sich neben Zirkel und Lineal z. B. auch das Parallellineal und der Winkelmesser, die auch alternativ zum Lösen von Konstruktionsaufgaben verwendet werden.

Nach immerhin 48 Gesprächen ist es also geschafft! Und das werden auch der Leser und die Leserin, wenn sie denn bis zum Schluss durchgehalten

haben, so empfinden. Michelsen hat die ersten vier Bücher der *Elemente* gelehrt und auch Unkundigen die Chance geboten, die Elemente der Geometrie zu lernen, was beabsichtigt, aber sicher auch mühsam war.
Die vorliegende Betrachtung versucht, Typisches an Michelsens Unterrichtsstil zu beschreiben und in den Zitaten auch Eindrücke vom Verhalten des Schülers zu vermitteln. Damit ist natürlich auf die Fülle der mathematischen und didaktischen Erläuterungen des Lehrers und die Reaktionen des Schülers nur hingewiesen. Eine genauere Untersuchung des gesamten Werkes z. B. auf die dabei von Michelsen verwendeten *didaktischen Prinzipien* (Vollrath/Roth 20122, S. 128–129) würde es ermöglichen, seinen Unterrichtsstil genauer zu beschreiben.
Es wird aber deutlich, dass hier von dem Lehrer Geometrie in Gesprächen fachlich anspruchsvoll, doch deutlich um das Wohl und den Erfolg des Schülers bemüht, gelehrt und gelernt wird. An den Universitäten war es damals durchaus noch üblich, die *Elemente* des Euklid den Studenten in *Vorlesungen* tatsächlich einfach vorzulesen. Andererseits war die Autorität dieses klassischen Lehrbuches so unbestritten – und damit auch erdrückend – dass sich ihr die Lehrer an Gymnasien weitgehend unterwerfen mussten. Man darf nicht vergessen, dass am Gymnasium erst zu Beginn des 20. Jahrhunderts unter dem Einfluss von Felix Klein diese enge Bindung überwunden wurde (Klein 1925, S. 226–231). Wir verdanken Michelsen einen Blick in den Unterricht eines sicher ungewöhnlichen Lehrers und besonders begabten Schülers.
Dieser Beitrag konnte freilich nur Hinweise, aber vielleicht auch Anregungen geben, wie man *didaktisch* historische Lehrtexte betrachten kann. Damit liegt er auf der Linie der von Karin Richter betriebenen und betreuten mathematikhistorischen Forschungen über Mathematiker aus Halle. Schließlich hat ja auch Michelsen in Halle studiert und den Grad eines Magisters erworben!

Literatur

Bürja, Abel (1787): Der selbstlernende Geometer, oder deutliche Anweisung zur Meßkunst, worin sowohl die euklidische Geometrie, als auch die geradlinichte und sphärische Trigonometrie, nebst einer Anleitung zum Nivelliren und Landmessen enthalten ist. Berlin und Libau: Lagarde und Friedrich.

Cantor, Moritz (1885): Johann Andreas Christian Michelsen, Allgemeine Deutsche Biographie 21, S. 698 (Online-Fassung).

Euklid, Elemente (1797): Hauff, Johann Karl Friedrich (Übers.). – Marburg: Akademische Buchhandlung.

Euklid, Die Elemente (1962): Thaer, Clemens (Hrsg., Übers.). – Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Gallin, Peter/Ruf, Urs (1993): Sprache und Mathematik in der Schule, Ein Bericht aus der Praxis. In: Journal für Mathematik-Didaktik 14, S. 3–33.

Hilbert, David (1977): Grundlagen der Geometrie. 12. Auflage. – Stuttgart: Teubner.

Klein, Felix (1925): Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus II. 3. Auflage. – Berlin: Springer.

Kröger, Desirée (2014): Abraham Gotthelf Kästner als Lehrbuchautor. Diss. Wuppertal (elpub.bib.uni-wuppertal.de/edocs/dokumente/fbc/mathematik/diss2014/kroeger/dc1434.pdf

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1976): Ein Dialog von Leibniz zur Einführung in die Arithmetik und Algebra. Knobloch, Eberhard (Hrsg., Übers.). – Stuttgart-Bad Cannstadt: frommann-holzboog.

Meschkowski, Herbert (1965): Mathematik als Bildungsgrundlage. – Braunschweig: Vieweg.

Meschkowski, Herbert (1986): Jeder nach seiner Façon. Berliner Geistesleben 1700–1810. – München, Zürich: Piper.

Michelsen, Johann Andreas Christian (1781–1784): Versuch in socratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der ebenen Geometrie, mit drei Fortsetzungen. – Berlin: Hesse.

Michelsen, Johann Andreas Christian (1784): Versuche in Socratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der Arithmetik, Bd. 1. – Berlin: Maurer.

Michelsen, Johann Andreas Christian (1788): Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen, Band 1. – Berlin: Matzdorff.

Michelsen, Johann Andreas Christian (1791): Euclides Elemente, für den gegenwärtigen Zustand der Mathematik bearbeitet, erweitert und fortgesetzt. – Berlin: Matzdorff.

Rudio, Ferdinand (1892): Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung. – Leipzig: Teubner.

Vollrath, Hans-Joachim (1968): Aspekte dialogischen Lehrens im Mathematikunterricht. In: Die Deutsche Schule 60, S. 327–336.

Vollrath, Hans-Joachim/Roth, Jürgen (2012): Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. 2. Auflage. – Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Wagenschein, Martin (1970): Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken I. 2. Auflage. – Stuttgart: Klett.