[111] Entfernungsmessung mit Messrad, Kompass und Messdreieck im Unterricht

In: Heike Hahn (Hrsg.): Anregungen für den Mathematikunterricht unter der Perspektive von Tradition, Moderne und Lehrerprofessionalität, Festschrift für Regina Möller, Hildesheim (Franzbecker) 2014, 10-18

1. Einleitung

Seit jeher beschäftigen sich Menschen mit der Frage nach der Entfernung zwischen zwei Orten. Und immer haben die Antworten mit Mathematik zu tun. Denn Entfernungen sind Längen, also Größen, die durch Messen ermittelt werden. Das Messen selbst ist an Instrumente gebunden, die nach gewissen Vorschriften zu bedienen sind. Und damit man mit dem Messergebnis etwas anfangen kann, müssen mit ihm bestimmte Vorstellungen verbunden sein. Den Messinstrumenten und der jeweiligen Messvorschrift liegen bestimmte mathematische und technische Ideen zugrunde, die im Allgemeinen mehr oder weniger verborgen sind (Vollrath 2013).

Im Mathematikunterricht sollen die Schülerinnen und Schüler Vorstellungen über Entfernungen entwickeln, Verständnis für Entfernungsmessungen gewinnen und Fähigkeiten zur Messung von Entfernungen erwerben. Das beginnt im Mathematikunterricht der Grundschule mit Situationen, bei denen natürliche Maßzahlen auftreten, setzt sich in der Sekundarstufe fort auf Entfernungen mit positiven rationalen und schließlich positiven reellen Maßzahlen. Die Betrachtung unterschiedlicher Situationen kann zu Problemen führen, die besondere Ideen zu ihrer Lösung bedürfen. Man denke nur an die unterschiedlich verlaufenden Wege, die es in der Praxis gibt.

Unsere heutige Sicht des Problems der Entfernung ist das Ergebnis einer Jahrhunderte langen Entwicklung. Wir tun gut daran, den Lernenden Einsicht in diesen Bereich unserer Kultur zu vermitteln. Dass dieser Weg in der Grundschule beginnen sollte und erfolgreich begangen werden kann, hat Regina Möller für verschiedene Sachbereiche in Theorie und Praxis deutlich gemacht. Dabei habe ich immer wieder ihre Begeisterungsfähigkeit und ihre Zähigkeit bewundert, Projekte zu realisieren. Wie man diese Aktivitäten in der Sekundarstufe fortsetzen kann, will ich an dem Beispiel der Entfernungsmessung deutlich machen und ihr damit meine Anerkennung ausdrücken.

2. Direkte Entfernungsmessung mit Messrädern

Auf Wegweisern findet man häufig Entfernungsangaben, heute in Kilometern, früher in Meilen. Könnten derartige Angaben heute von Jugendlichen kontrolliert werden? Sicher, wenn sie z. B. ein Fahrrad mit Kilometerzähler besitzen. Und vermutlich ist die Entfernung ursprünglich auch auf ähnliche Weise mit Hilfe eines Messrades ermittelt worden. Derartige Messräder (Hodometer) sind schon seit dem Altertum bekannt (Schmidt 1935). Ihnen liegt die mathematische Idee zugrunde, dass beim Abrollen eines Rades bei einer vollen Umdrehung der Umfang des Rades zurückgelegt wird. Die Anzahl der Umdrehungen liefert dann mit dem Vielfachen der Umfänge die Länge des zurückgelegten Weges. Im einfachsten Fall beobachtet man, wie oft eine bestimmte Markierung des Rades an einem Punkt vorbeigeht. Schon frühzeitig machte man das aber auch durch ein Klacken hörbar (Abb. 1).

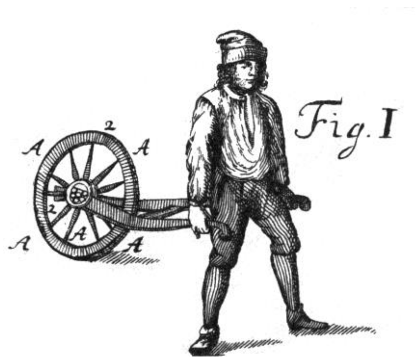

Abbildung 1: Messrad aus: Jakob Leupold, Theatrum machinarum supplementum, Leipzig 1739 (Ausschnitt von Tab. VI)

Moderne Messräder haben ein angebautes Zählwerk. Es gibt auch einfache Modelle für den Unterricht mit einem Radumfang von 1 m, bei denen die Umdrehungen zu zählen sind (Abb.2).

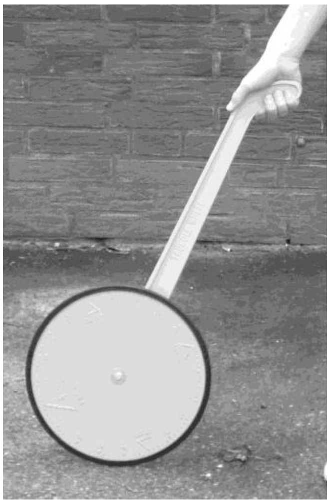

Abbildung 2: Messrad für den Unterricht

3. Indirekte Messung durch Vorwärtseinschneiden

Ein klassisches Problem der Entfernungsmessung ergibt sich, wenn die Messung direkt nicht möglich ist, weil wie in dem von Johann Friedrich Penther 1732 gegebenen Beispiel ein See zwischen den beiden Orten liegt (Abb. 3). Die fragliche Entfernung zwischen *A* und *B* kann hier nicht direkt gemessen werden. Die mathematische Idee besteht nun darin, einen dritten Punkt *C* zu wählen, dessen Entfernung zu *B* frei gewählt werden kann. Die Strecke zwischen *B* und *C* wird als *Grundlinie* bezeichnet. Im Gelände ist damit ein Dreieck eindeutig festgelegt. Kennt man nun die Seitenlänge $\overline{BC}$ und die anliegenden Winkel, dann kann man die Länge der Seite $\overline{BA}$ bestimmen. Dieses Vorgehen bezeichnet man in der Landvermessung als *Vorwärtseinschneiden*.

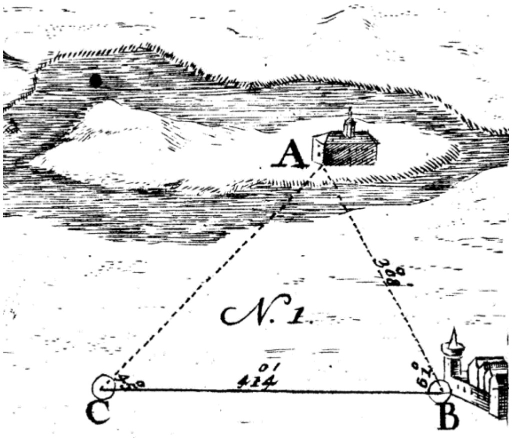

Abbildung 3: Vorwärtseinschneiden, aus: Johann Friedrich Penther, Praxis geometriae, Augsburg 1732 (Aussschnitt aus Tab. XVI)

Traditionell wird dieses Problem im Gymnasium als Anwendung der Trigonometrie behandelt. Vom Dreieck *ABC* sind also die Seitenlänge $\overline{BC}$ und die Innenwinkel β bei *B* und γ bei *C* bekannt. Zunächst ist klar, dass damit auch der dritte Winkel α bei *A* bekannt ist, denn da die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, gilt:

$$\alpha = 180° - \beta - \gamma.$$

Nach dem Sinussatz gilt:

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}\,.$$

Man erhält also:

$$\overline{AB} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\,\overline{BC}\,.$$

Mathematisch ist damit das Problem allgemein gelöst. Betrachten wir nun konkret das Beispiel aus Abb.3. Dort sind folgende Daten gegeben:

$\overline{BC}$ = 41 Ruten 4 Fuß; β = 61°, γ =45°. Das ergibt α = 74°.

Zur Berechnung von $\overline{AB}$ mit dem Taschenrechner rechnen wir zunächst die Länge $\overline{BC}$ ins Dezimalsystem um. Wir nehmen an: 1 Rute = 10 Fuß, 1 Fuß = 0,30 m. Das ergibt: $\overline{BC}$ = 124,2 m. Setzen wir das oben ein, so erhalten wir: $\overline{AB}$ = 91,36 m oder 30 Ruten 5 Fuß.

Penther hat 30 Ruten 8 Fuß angegeben. Doch er hatte die Lösung *zeichnerisch* gefunden, indem er ein ähnliches Dreieck konstruierte. Das mag die Abweichung erklären.

Bei einer von mir angefertigten Zeichnung habe ich zunächst eine Grundlinie der Länge 12,4 cm gezeichnet. Daran habe ich mit dem Winkelmesser des Geodreiecks die beiden anliegenden Winkel β = 61°, γ =45° angetragen. Als Länge der gesuchten Seite habe ich 9,1 cm abgelesen und damit $\overline{AB}$ = 91 m oder 30 Ruten und 3 Fuß erhalten. Also auch mein gefundener Wert weicht von dem errechneten immerhin um 2 Fuß ab. Das ist absolut genommen immerhin ein Fehler von etwa 60 cm, relativ jedoch nur etwa 1%, was in der Praxis akzeptabel ist.

Penther hatte die Winkel mit einem Vollkreisinstrument (Abb. 4) durch Anvisieren gemessen. Auch dabei sind natürlich bereits Fehler aufgetreten, die sich dann beim Zeichnen fortsetzen.

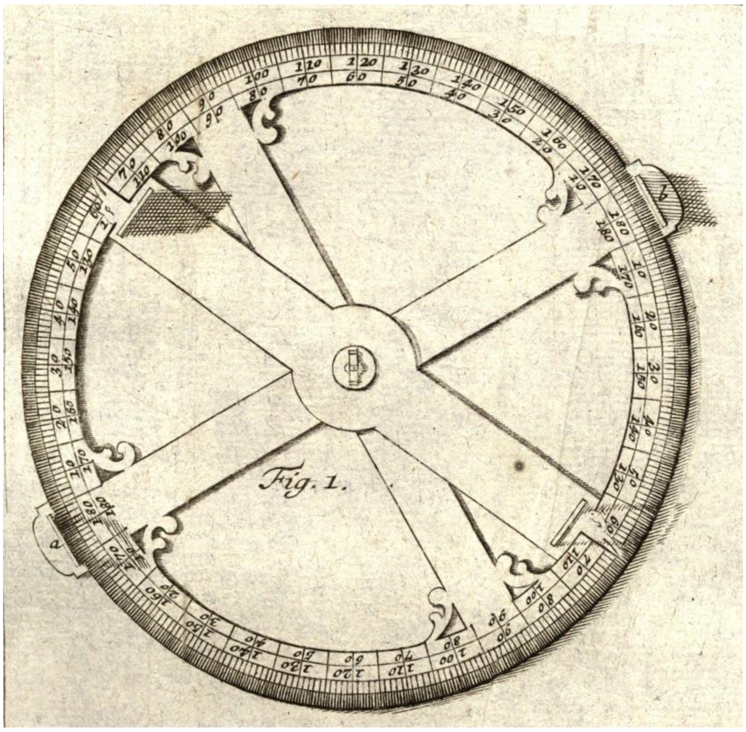

Abbildung 4: Vollkreisinstrument aus: Johann Friedrich Penther, Praxis geometriae, Augsburg 1788 (Aussschnitt aus Tab. IV)

Ein historisches Vollkreisinstrument ist heute eine Kostbarkeit. Auch wenn derartige Instrumente noch im 20. Jahrhundert gebaut wurden, sind sie für den Unterricht kaum mehr verfügbar. Eine einfache Lösung stellt jedoch ein Marschkompass mit Peileinrichtung dar.

4. Erzeugung eines ähnlichen Dreiecks mit Hilfe eines Kompasses

Mitte des 16. Jahrhunderts beginnt der Kompass (Bussole) bei den Vermessungsinstrumenten Einzug zu halten (Schmidt 1935). Mit der von ihm angezeigten Nord-Süd-Richtung ist eine „Nulllinie“ für Messungen in der Waagerechten gegeben. Winkelmessungen werden durch Visiereinrichtungen ermöglicht. Im Folgenden wollen wir zeigen, wie die klassische Aufgabe mit einem Marschkompass mit Visiereinrichtung, innen drehbarer Kapsel und 360°-Einteilung gelöst werden kann.

Abbildung 5: Vorwärtseinschneiden mit einem Peil-Kompass

Wir benutzen den Kompass also zunächst nur als Winkelmesser. Die Grundlinie $\overline{CB}$ ist festgelegt. Nun visiert man von Punkt *C* aus den Punkt *B* an und dreht die Kapsel so, dass die Nadel auf 0° weist (Abb. 5). Jetzt visiert man von *C* aus Punkt *A* an und notiert den von der Nadel angezeigten Winkel von 45°. Anschließend geht man zu Punkt *B*, visiert Punkt *A* an und notiert die von der Nadel angezeigte Winkelgröße von 119°. Man macht sich klar, dass die erste Winkelmessung die Größe des Innenwinkels bei *C* und die zweite die Größe des Außenwinkels bei *B* angibt. Damit kann nun die Zeichnung angefertigt und die gesuchte Länge $\overline{BA}$ bestimmt werden.

Auch beim Zeichnen lässt sich der Kompass als Winkelmesser benutzen. Die Länge der Grundlinie soll ja 124,2 m betragen. Es bietet sich also ein

Maßstab von 1:1000 an, sodass man eine 12,4 cm lange Strecke unten auf das Blatt zeichnet. Dann legt man zunächst den Kompass an den linken Endpunkt an der Linie an und dreht das Papier mit dem Kompass, bis die Nadel auf 0° zeigt. Dann dreht man den Kompass, ohne das Papier zu bewegen, so weit, bis er den Winkel anzeigt, und zeichnet den zugehörigen Schenkel. Entsprechend geht man mit dem anderen Winkel vor. Damit erhält man das gezeichnete Dreieck, das dem Geländedreieck ähnlich ist. Nun kann man die Bildlänge der gesuchten Strecke $\overline{BA}$ ablesen. In der Zeichnung beträgt sie 9,1 cm. Das ergibt als tatsächliche Entfernung 91 m.

Grundlinie $\overline{CB}$: 0 Seite $\overline{CA}$: 8 Seite $\overline{BA}$: 21

Abbildung 6: Zeichnen des Bilddreiecks mit dem Kompass

Meist geben die Bedienungsanleitungen von Kompassen auch ein Beispiel für das Vorwärtseinschneiden mit dem Kompass an.

Militärisch genutzte Kompasse haben meist eine 64-er Einteilung, denn dort wird der Vollkreis in 6400 Teile geteilt (6400 Strich). Die Aufgabe wird in gleicher Weise gelöst, wenn man auch für die Zeichnung den Kompass benutzt. Man notiert dann die entsprechenden Winkel. Für 45° wird die Zahl 8 angezeigt, für 119° etwa die Zahl 21. Beim Zeichnen des Dreiecks mit dem Kompass nimmt man dann eben diese Zahlen. (In der DDR wurde mit 6000 Strich gearbeitet.)

5. Erzeugung eines ähnlichen Dreiecks mit Hilfe eines Messdreiecks

Historisch lassen sich auch *instrumentelle* Lösungen nachweisen, bei denen mit Hilfe der gemessenen Größen ein *Messdreieck* eingestellt wird, an dem man die fragliche Seitenlänge unmittelbar ablesen kann (Schmidt 1935). Die technische Idee des *Messdreiecks* beruht darauf, an den Enden einer Stange drehbare Stangen anzubringen, deren Winkel sich mit den dort angebrachten Winkelmessern einstellen lassen. Richtet man eine der Seitenstangen auf der Grundstange verschiebbar ein, so kann man für die Grundlinie unterschiedliche Längen wählen (Abb.7).

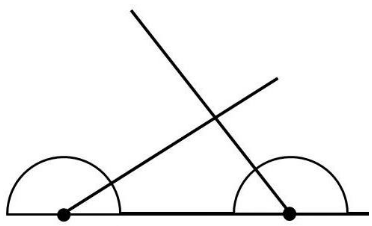

Abbildung 7: Zum Prinzip des Messdreiecks

Auch diese Instrumente haben eine längere Entwicklung erfahren (Schmidt 1935). Frühe Instrumente dieser Art sind das „Trigomètre“ von Philippe Denfrie (1795) sowie das „Geometrische Triangularinstrument“ von Jost Bürgi (um 1592). Abb. 8 zeigt ein derartiges Messdreieck aus Messing, das um 1920 für militärische Zwecke entwickelt wurde. Die Winkelmesser weisen eine 6400-Teilung auf, sodass man unmittelbar die mit dem militärischen Kompass gemessenen Winkel einstellen kann. Alle Stäbe tragen Skalen, sodass man die Längen der Dreiecksseiten maßstabsgerecht einstellen bzw. ablesen kann.

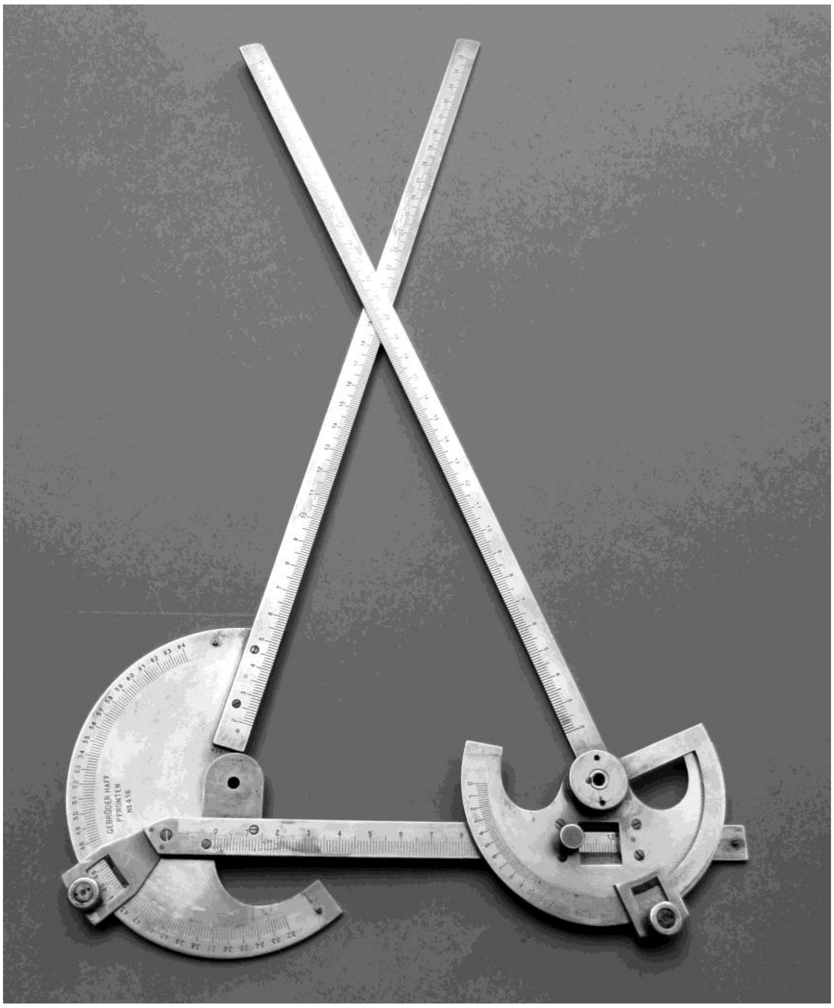

Abbildung 8: Messdreieck der Fa. Haff, Pfronten, um 1920

Im Prinzip lässt sich ein einfaches Messdreieck selbst herstellen und erproben. Gelegentlich mag sich in der Lehrmittelsammlung auch ein Hilfsmittel zu Winkeln an Parallelen finden, das sich als Messdreieck umfunktionieren lässt (Abb. 9). Damit kann man die Schülerinnen und Schüler die Aufgaben zum Vorwärtseinschneiden auch *manuell* lösen lassen.

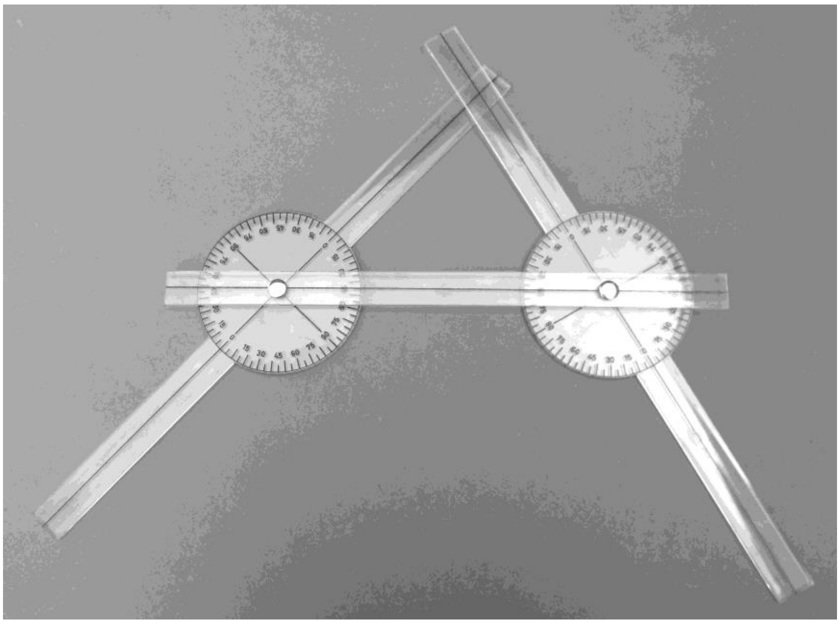

Abbildung 9: Ein Messdreieck aus einem Lehrmittel

6. Das Vorwärtseinschneiden im Mathematikunterricht

In dem Bewusstsein, dass „Geometrie" dem Wortsinn nach „Erdmessung" bedeutet, werden für den Mathematikunterricht immer wieder praktische Vermessungsaufgaben vorgeschlagen (z. B. Ludwig 2004). Auffällig ist dabei das wachsende Interesse an Problemen und Verfahren, die sich mit Mitteln der *Elementargeometrie* behandeln lassen. Interessant ist dabei, dass sich dafür häufig historische Vorbilder finden. Das gilt vor allem auch für die dabei verwendeten Instrumente. Sie sind Träger mathematischer und technischer Ideen (Vollrath 2013) und als solche für den Mathematikunterricht interessant. Die grundlegenden Ideen lassen sich vielfach von Schülerinnen und Schüler selbst an bekannten Instrumenten wie dem Kilometerzähler des Fahrrades als Streckenmesser oder dem Kompass als Winkelmesser entdecken.

Manche Instrumente können sie auch selbst basteln, etwa ein Visierlineal, einen Messtisch (Vollrath 2004) oder einen Winkelspiegel (Heidenreich 2004). Auch im Lehrmittelhandel sind preiswerte vereinfachte Schulversionen erhältlich, z. B. Messräder oder Übungstheodolite.

Dieser Beitrag zeigt Wege auf, wie man im Unterricht die grundlegende mathematische Idee des Vorwärtseinschneidens auch praktisch auf unterschiedlichen Niveaus behandeln kann: *manuell* („enaktiv“), *zeichnerisch* („ikonisch“) und *rechnerisch* („symbolisch“), um an die unterschiedlichen Darstellungsweisen von Jerome S. Bruner (Bruner 1974) zu erinnern. Dabei war für mich die Entdeckung des weitgehend unbekannten Messdreiecks, mit dem auch eine manuelle Lösung möglich ist, eine besondere Überraschung und Freude.

7. Literatur

Bruner, Jerome S., Entwurf einer Unterrichtstheorie, Berlin (Berlin) 1974

Heidenreich, Matthias, Vermessung eines Sees, in: mathematik lehren, 124, (2004), S. 49-53

Leupold, Jakob, Theatrum machinarum supplementum. Leipzig 1739, Nachdruck: Hannover (Schäfer) 1982

Ludwig, Matthias (Hrsg.): Geometrie: Die Erde vermessen, mathematik lehren, 124 (2004)

Penther, Johann Friedrich, Praxis geometriae, Augsburg 1732; Nachdruck: Stuttgart (Klett) 1981

Schmidt, Fritz, Geschichte der geodätischen Instrumente und Verfahren im Altertum und Mittelalter, Kaiserslautern (Kayser) 1935; Nachdruck: Stuttgart (Wittwer) 1988

Vollrath, Hans-Joachim, Landvermessung mit einem Messtisch, in: mathematik lehren, 124, (2004), S. 20-22, 47-48

Vollrath, Hans-Joachim, Verborgene Ideen, Historische mathematische Instrumente, Wiesbaden (Springer Spektrum) 2013