## [108] Mein Cursus mathematicus

*In:* Thomas Krohn, Elvira Malitte, Gerd Richter, Karin Richter, Silvia Schöneburg, Rolf Sommer (Hrsg.): Mathematik für alle - Wege zum Öffnen von Mathematik. Mathematikdidaktische Ansätze. *Festschrift für Wilfried Herget,* Hildesheim (Franzbecker) 2011,

Für die Ausstellung „wunderbar berechenbar – Die Welt des Würzburger Mathematikers Kaspar Schott (1608–1666)“, die 2008 in Würzburg stattfand, entwickelte ich einen Lernzirkel mit 14 Experimenten, die den Besuchern einen Eindruck vermitteln sollten, mit welchen Problemen sich dieser Mathematiker befasste. Die Mathematischen Wissenschaften umfassten damals ihre wichtigsten Anwendungsgebiete, zu denen neben den Naturwissenschaften auch die Künste gehörten. Im Folgenden werden diese Experimente vorgestellt, um eine Möglichkeit zu zeigen, wie im Mathematikunterricht an praktischen historischen Problemen Einblicke in die Problemgeschichte der Mathematik gegeben werden können.

### Einleitung

Eine für das Jahr 2008 geplante Ausstellung der Würzburger Universitätsbibliothek über den Würzburger Mathematiker Kaspar Schott (1608–1666) aus Anlass seines 400. Geburtstages bot mir die Möglichkeit, einen Lernzirkel mit Experimenten zu Problemen aus seinem umfangreichen Werk zu entwickeln. Kaspar Schott hatte von 1655 bis zu seinem Tode im Jahr 1666 in Würzburg eine Professur für mathematische Wissenschaften, die damals Mathematik mit ihren Anwendungen umfasste. Er interessierte sich für interessante Phänomene aus Natur und Technik, über die er gelesen und die er häufig auch in der Natur oder in Experimenten beobachtet hatte. Bei dem Versuch, diesen Phänomenen auf den Grund zu gehen, war ihm Mathematik häufig eine wesentliche Hilfe.

In der von mir geplanten Ausstellung sollten seine in der Universitätsbibliothek vorhandenen Bücher mit ihren ansprechenden Abbildungen vorgestellt, an historischen Instrumenten veranschaulicht und in Postern erläutert werden. Der geplante Lernzirkel sollte den Besuchern Gelegenheit bieten, an eigenen Experimenten Erfahrungen zu Problemen zu sammeln, mit denen sich Schott beschäftigt hatte. Dabei ging es mir in erster Linie darum, Experimente zu finden, in denen Mathematik zum Schlüssel für das Verstehen und das Lösen eines Problems wird.

Das mathematische Hauptwerk von Kaspar Schott war eine Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, die er unter dem Titel *Cursus mathematicus* 1661 in Würzburg herausgab. Das schien mir auch ein geeigneter Titel für meinen Lernzirkel zu sein. Entsprechend den Themen der Ausstellung wählte ich 14 Experimente. Der Cursus mathematicus erwies sich als ein attraktives Angebot für Schulklassen, die in großer Zahl die Ausstellung besuchten. In Vorversuchen hatten wir die Experimente an Studierenden getestet und anschließend verbessert. Das Projekt wurde von der Otto-Volk-Stiftung des Instituts für Mathematik gefördert.

Fast zwangsläufig bin ich bei meinen Planungen auf etliche didaktische Fragen gestoßen, zu denen Wilfried Herget interessante Antworten gefunden und praktische Anregungen für den Unterricht gegeben hat. Ich möchte ihm mit dem folgenden Bericht meine Verbundenheit ausdrücken.

## Experimente zur Mathematik

Zu jedem Experiment gab es ein einführendes Poster und eine Arbeitsanweisung. Das Poster stellte das zu bearbeitende Problem aus der Perspektive des Werkes von Kaspar Schott dar. Fünf Experimente befassten sich mit Mathematik im engeren Sinne.

### Magische Quadrate

Wiederholt hatte Schott *magische Quadrate* behandelt und Wege gezeigt, wie man derartige Quadrate erzeugen kann. (Magische Quadrate haben gleiche

Zeilen-, Spalten- und Diagonalensummen.) An einem großen magischen Quadrat der Seitenlänge 3 sollte untersucht werden, wie man durch geschicktes Umsortieren wieder ein magisches Quadrat erhält (Abb. 1). Gedacht war hier an die Entdeckung von Abbildungen, die die Eigenschaft der Summengleichheit erhalten.

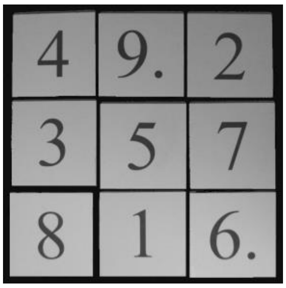


Abb. 1 Magisches Quadrat

Abb. 2 Abwiegen von Maiskörnern

**Faszination großer Zahlen**

Schott erwähnt im 3. Band seiner *Magia universalis naturae et artis* (1658) die *Sandrechnung des Archimedes* und führt eine entsprechende Rechnung für Mohnkörner durch. Es lag also nahe, eine ähnliche Aufgabe – Herget würde wohl von einer „Fermi-Frage" sprechen – zu stellen.

Mit Hilfe einer Waage, eines Taschenrechners und eines Päckchens Maiskörner sollte berechnet werden, wie viele Maiskörner ungefähr die Jahresproduktion von 560 Millionen to weltweit umfasst (Abb. 2).

**Das Rad des Aristoteles**

Wenn man eine Kreisscheibe abrollt, dann erwartet man unwillkürlich, dass die Länge des Rollweges gerade gleich dem Umfang des Kreises ist. Diese Annahme wird durch das „Rad des Aristoteles" problematisiert. Das war ein altes Problem, das viele Wissenschaftler beschäftigt hatte. Auch Galileo Galilei hatte sich in seinen *Discorsi* damit auseinander gesetzt. Schott berichtet von diesen Versuchen und spricht vom „zyklometrischen Paradoxon“.

Zwei Räder mit verschiedenen Durchmessern sind konzentrisch fest mit einander verbunden und sollen auf eigenen Schienen abrollen (Abb. 3).

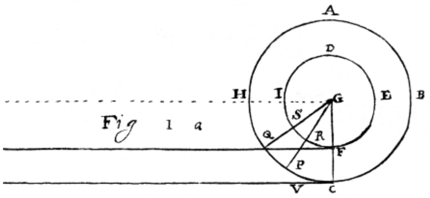


Abb. 3 Zyklometrisches Paradoxon, aus: Kaspar Schott, *Magia universalis III* zu S. 668 , UB Würzburg

Die Kombination der Räder wird als „Rad des Aristoteles“ (*Rota Aristotelica*) bezeichnet. Wenn das große Rad einmal abgerollt ist, dann ist zwangsläufig auch das kleine Rad auf seiner Schiene einmal abgerollt. Die beiden Strecken auf den Schienen sind gleich lang. Sie sind gleich dem Umfang des großen Rades. Würde das kleine Rad einmal *allein* abrollen, so wäre die Strecke natürlich kürzer, also gleich dem Umfang des kleinen Rades.

Ich ließ dazu ein Modell bauen, das die meisten Besucher irritierte (Abb. 4). Als einigermaßen überzeugende Antwort wurde gefunden, dass die Abrollbewegung des kleinen Rades von einer Verschiebung („Schlupf“) überlagert wird.

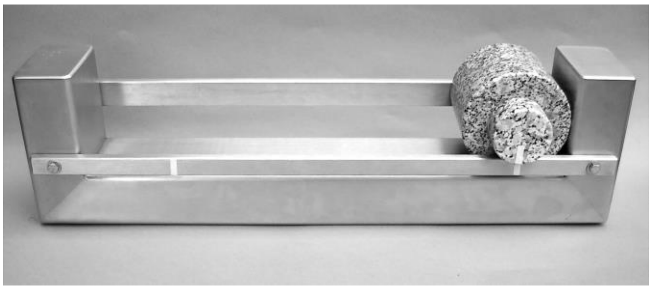

Abb. 4 Rad des Aristoteles

**Schotts Rechenkästchen**

In einem postum herausgegeben Werk beschreibt Schott eine *Cistula* , die nach dem Prinzip der Neper-Stäbe arbeitet (Abb. 5).

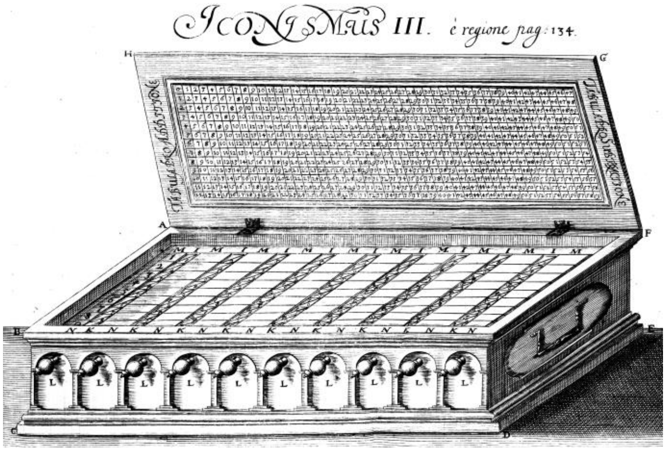


Abb. 5 Cistula, aus: Kaspar Schott, *Organum mathematicum* zu S. 134, UB Würzburg.

Bei ihm sind die Einmal-Eins-Reihen der Neper-Stäbe von 0 bis 9 auf Walzen aufgetragen. In der Ausstellung konnten wir ein solches historisches Rechenkästchen aus dem *Arithmeum* in Bonn zeigen.

Ich habe ein Gerät mit 4 Walzen nachgebaut und das Prinzip in Anlehnung an die schriftliche Multiplikation erklärt (Abb. 6). Die Besucher hatten dann die Möglichkeit, selbst Multiplikationsaufgaben mit dem Modell zu rechnen.

Abb. 6 Modell der Cistula

**Kirchers Verschlüsselungsmaschine**

In seiner *Schola steganographica* (1665) beschreibt Schott die *Arca steganographica* (Geheimschrift-Kasten) von Athanasius Kircher (Abb. 7). Dabei handelt es sich um eine *Verschlüsselungsmaschine.* Sie enthält Stäbchen, die mit den einzelnen Buchstaben des Alphabets benannt sind. Auf jedem der mit einem bestimmten Buchstaben bezeichneten Stäbe sind den einzelnen Buchstaben des damaligen Alphabets in jeweils bestimmter Weise die Zahlen von 1 bis 24 zugeordnet.

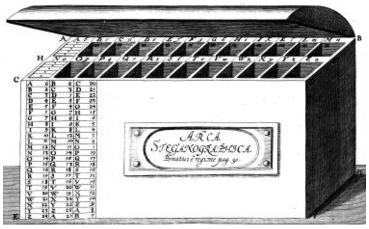

Abb. 7 Arca steganographica, aus: Kaspar Schott, *Schola steganographica* zu S. 91, UB Würzburg

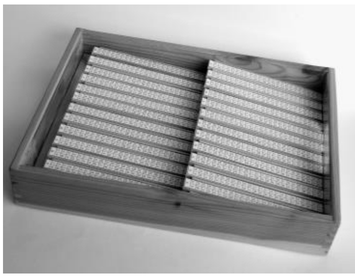

Abb.8 Modell der Arca steganographica

Die Verschlüsselung geht wie folgt vor sich (Abb. 9):

*1. Schritt:* Sender und Empfänger vereinbaren ein Codewort, z. B. SALVE.

*2. Schritt:* Beide legen das Codewort mit den Namen der Stäbchen. Der erste Stab hat also den Namen S, der zweite den Namen A, der dritte den Namen L, der vierte den Namen V und der fünfte den Namen E.

*3. Schritt: Verschlüsseln* einer Nachricht.

Beispiel: Das Wort NOX soll verschlüsselt werden.

| S | | A | | L | | V | | E | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 18 | A | 1 | A | 11 | A | 20 | A | 5 |
| B | 19 | B | 2 | B | 12 | B | 21 | B | 6 |
| C | 20 | C | 3 | C | 13 | C | 22 | C | 7 |
| D | 21 | D | 4 | D | 14 | D | 23 | D | 8 |
| E | 22 | E | 5 | E | 15 | E | 24 | E | 9 |
| F | 23 | F | 6 | F | 16 | F | 1 | F | 10 |
| G | 24 | G | 7 | G | 17 | G | 2 | G | 11 |
| H | 1 | H | 8 | H | 18 | H | 3 | H | 12 |
| I | 2 | I | 9 | I | 19 | I | 4 | I | 13 |
| K | 3 | K | 10 | K | 20 | K | 5 | K | 14 |
| L | 4 | L | 11 | L | 21 | L | 6 | L | 15 |
| M | 5 | M | 12 | M | 22 | M | 7 | M | 16 |
| N | 6 | N | 13 | N | 23 | N | 8 | N | 17 |
| O | 7 | O | 14 | O | 24 | O | 9 | O | 18 |
| P | 8 | P | 15 | P | 1 | P | 10 | P | 19 |
| Q | 9 | Q | 16 | Q | 2 | Q | 11 | Q | 20 |
| R | 10 | R | 17 | R | 3 | R | 12 | R | 21 |
| S | 11 | S | 18 | S | 4 | S | 13 | S | 22 |
| T | 12 | T | 19 | T | 5 | T | 14 | T | 23 |
| V | 13 | V | 20 | V | 6 | V | 15 | V | 24 |
| W | 14 | W | 21 | W | 7 | W | 16 | W | 1 |
| X | 15 | X | 22 | X | 8 | X | 17 | X | 2 |
| Y | 16 | Y | 23 | Y | 9 | Y | 18 | Y | 3 |
| Z | 17 | Z | 24 | Z | 10 | Z | 19 | Z | 4 |

Abb. 9 Verschlüsselung

Man sucht auf dem 1. Stab die Zahl, die zu N gehört: 6.

Dann sucht man auf dem 2. Stab die Zahl, die zu O gehört: 14.

Auf dem 3. Stab lautet die Zahl, die zu X gehört: 8.

Die Verschlüsselung von NOX ergibt: 6 – 14 – 8.
Bei längeren Botschaften beginnt man wieder von vorn. Beim *Entschlüsseln* geht man umgekehrt vor.

Eine historische Verschlüsselungsmaschine dieser Art gibt es im *Herzog Anton Ulrich-Museum* in Braunschweig. Ich habe eine solche Verschlüsselungsmaschine nach der Vorlage von Schott gebaut und damit verschlüsseln und entschlüsseln lassen (Abb. 8).

## Experimente zu den Naturwissenschaften

In den Naturwissenschaften bot ich Experimente zur Optik und zur Akustik an. Optik hat Schott ausführlich im 1. Band der *Magia universalis naturae et artis* (1657) und Akustik im 2. Band dieses Werkes behandelt.

### Spiegel

Schott untersuchte unter anderem, welche Wirkung *zylindrische Spiegel* haben (Abb. 10). Ich bot einen großen Metallspiegel an, mit dem Verzerrungen des eigenen Bildes erzeugt werden konnten (Abb. 11). Mathematisch waren damit Vorstellungen von „eben“, „konvex“ und „konkav“ verbunden.

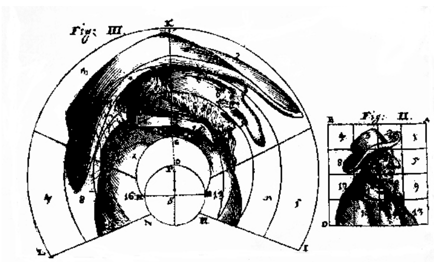

Abb. 10 Verzerren mit einem zylindrischen Spiegel, aus: Kaspar Schott, *Magia universalis naturae et artis I*, zu S. 163, UB Würzburg

Mit einen von mir gebastelten *Doppelspiegel*, bei dem die Spiegelflächen gegeneinander drehbar waren, konnten Erfahrungen zum „Verketten von Spiegelungen“ gesammelt werden. Beeindruckend war dabei, wie man damit aus einem Dreieck regelmäßige Vielecke als Spiegelbilder erzeugen konnte (Abb. 12).

Abb. 11 Metallspiegel als Zerrspiegel

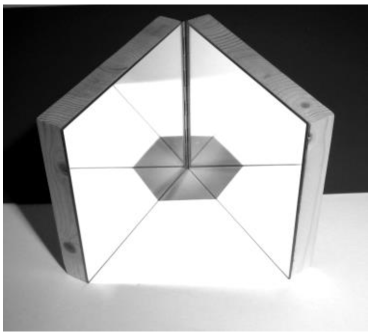

Abb. 12 Erzeugen eines regelmäßigen Sechsecks mit einem Doppelspiegel

**Klangstäbe**

Unten auf dem Titelbild der *Musurgia universalis* (1650) von Athanasius Kircher ist Pythagoras abgebildet, der auf drei Schmiede zeigt (Abb. 13).

Abb. 13 Pythagoras und die Schmiede, Ausschnitt aus dem Titelbild von: Athanasius Kircher, *Musurgia universalis* , UB Würzburg

Es spielt auf die Legende an, dass Pythagoras bei der Beobachtung von Schmieden auf unterschiedliche Tonhöhen aufmerksam wurde, die er auf das unterschiedliche Gewicht der Hämmer zurückgeführt haben soll. (Sachlich ist das nicht möglich, denn der Ton ergibt sich durch Schwingungen des Ambosses. Verschiedene Hämmer bringen allenfalls unterschiedliche Klänge hervor.) Auch Kaspar Schott bezieht sich im 2. Band seiner *Magia universalis naturae et artis* (1657) auf diese Legende.

Meine Erfahrungen aus dem Physikunterricht mit dem angeblich von Pythagoras erfundenen Monochord und mit der Gitarre veranlassten mich, aus Kupferrohr Klangstäbe herzustellen, deren Längen im Verhältnis 4:5 und 2:3 zu einem Anfangsstab standen.

Abb. 14 Klangstäbe im linearen Verhältnis

Abb.15 Klangstäbe im quadratischen Verhältnis

Ich erhoffte in Analogie zum Monochord beim Anschlagen einen schönen Dreiklang aus Grundton, Terz und Quinte zu hören. Doch ich wurde enttäuscht. Erst als ich es mit den Verhältnissen der Längenquadrate versuchte, ergaben die Verhältnisse 4:5 und 2:3 den erhofften Dreiklang. Ich hatte also persönlich „hautnah" ein „Aha-Erlebnis" bei einer typischen Mathematisierung erlebt.

In einem Versuch ließ ich beide Versionen ausprobieren, ausmessen und mit einem Taschenrechner berechnen (Abb. 14–15). (Mit dem Versuch konnte ich sogar etliche Physiklehrer überraschen.)

## Experimente zur Technik

In seiner *Technica curiosa* (1664) berichtete Kaspar Schott zunächst ausführlich über die Vakuumversuche von Otto von Guericke, die er damit weltweit bekannt machte. Eine wichtige Rolle spielten dabei aber auch viele technische „Wunderwerke" (z.B. U-Boote, Getriebe, Versuche zum Bau eines Perpetuum mobile oder wundersame Brunnen).

**Getriebe**

Sowohl im 3. Band der *Magia universalis naturae et artis* als auch in der *Technica curiosa* befasst sich Schott mit Getrieben (z. B. Abb. 16).

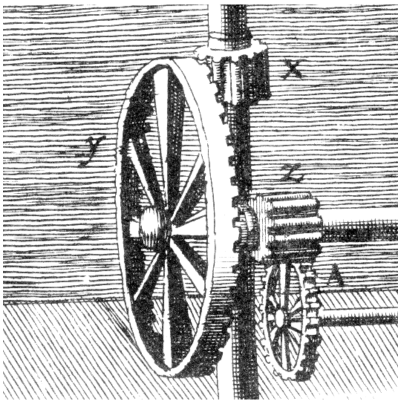


Abb. 16 Getriebe, aus: Kaspar Schott, *Technica curiosa* zu S. 383, UB Würzburg

Übersetzungen und Untersetzungen kann man an *Zahnradgetrieben* gut mit Hilfe der „Bruchrechnung“ erklären. Als Beispiel wählte ich eine Handbohrmaschine, bei der sich durch Abzählen der Zähne das Übersetzungsverhältnis bestimmen und dann seine Wirkung beobachten ließ (Abb. 17).

Abb. 17 Handbohrmaschine

Bei einem *Mehrfachgetriebe* ergibt sich das Übersetzungsverhältnis durch Multiplikation der einzelnen Verhältnisse. Als Gerät bastelte ich mit Hilfe eines Baukastens ein Dreifachgetriebe, dessen Wirkung man an einem vom letzten Rad betriebenen Hammer studieren konnte (Abb. 18).

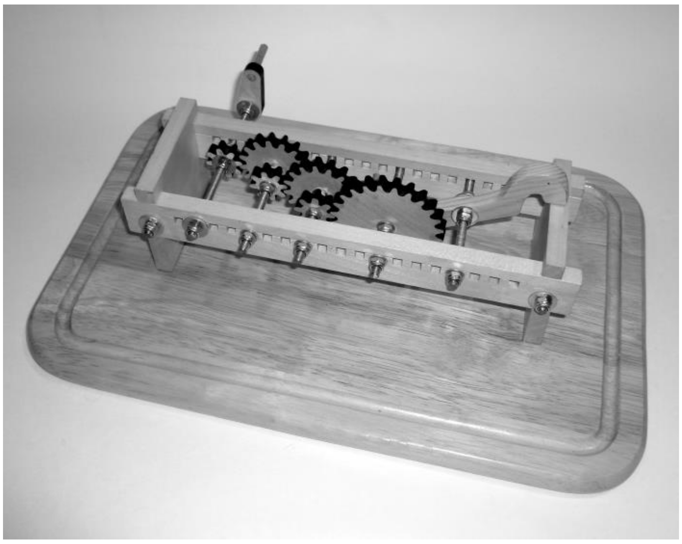

Abb. 18 Dreifachgetriebe

**Wunderwerke**

Schott beschreibt in der *Technica curiosa* einen Tischbrunnen, den man nur umzudrehen brauchte, sobald er aufhörte Wasser zu spenden. Dann fing das Wasser wieder an zu sprudeln (Abb. 19). Dabei handelte es sich um einen doppelten Heron-Brunnen.

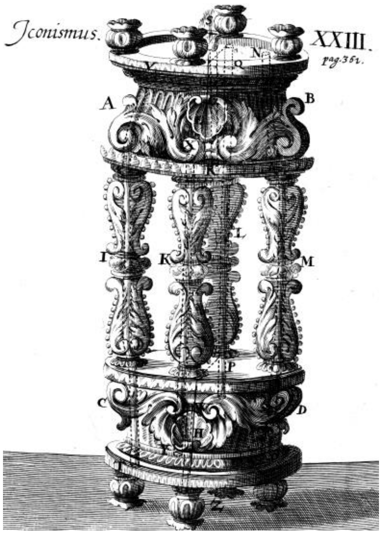


Abb. 19 Schotts Wendebrunnen, aus: Kaspar Schott, *Technica curiosa*, zu S. 361, UB Würzburg

Abb. 20 Gebastelter Wendebrunnen

Im Internet habe ich tatsächlich eine Vorrichtung gefunden, mit der man einen *Wendebrunnen* aus zwei Wasserflaschen bauen kann (Abb. 20). Das Prinzip des Heron-Brunnens kann man entdecken, wenn man das notwendige „Druckgefälle“ sucht. Dass das Umwenden funktioniert, liegt an der auffälligen „räumlichen Symmetrie“ des Gerätes, die sich hier gut studieren lässt.

Kaspar Schott interessierte sich wie viele seiner Zeitgenossen für das Problem des *Perpetuum mobile*. Er verstand darunter eine Maschine, die fortwährend weiterlief, wenn sie einmal in Gang gesetzt wurde. Er galt als Experte, und ihm wurden immer wieder Maschinenzeichnungen zur Begutachtung vorgelegt (z. B. Abb. 21), bei denen er dann zeigte, weshalb die geplante Maschine nicht funktionieren konnte. (Im Fall von Abb. 21 konnte er nachweisen, dass der Schwerpunkt unter dem Drehpunkt der Scheibe lag.)

Ich bot den Besuchern eine Sonnenmühle an, bei der sie mit einer Lampe experimentieren sollten und z. B. den Zusammenhang zwischen Beleuchtungsstärke (Veränderung des Abstands) und Drehgeschwindigkeit, also qualitativ, einen „funktionalen Zusammenhang“ studieren konnten (Abb. 22).

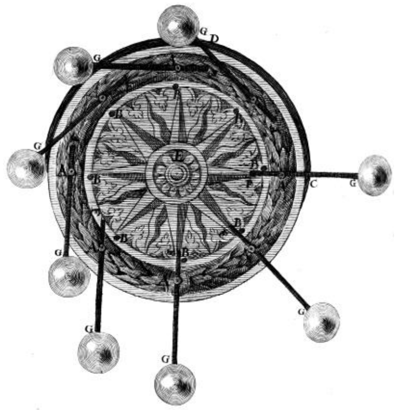

Abb. 21 Versuch eines Perpetuum mobile von Jeremias Mitz aus Basel.
Aus: Kaspar Schott, *Technica curiosa*
S. 409, UB Würzburg

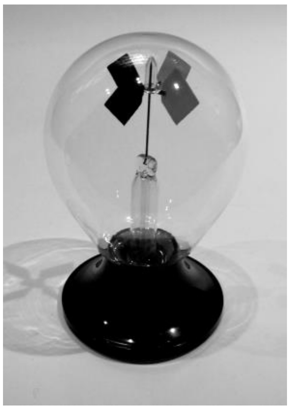

Abb. 22 Sonnenmühle

## Spaß und Ernst bei Kaspar Schott

In einem unter dem Pseudonym ASPASIUS CARAMUELIUS herausgegebenen Buch *Ioco-seria naturae et artis* (1666) bringt Schott allerlei Rätselhaftes. Das Pseudonym ist vermutlich ein Anagramm (durch Vertauschung der Buchstaben aus einem Namen erzeugter neuer Name). Das habe ich zum Aufhänger für das *Erzeugen von Anagrammen* mit Teilen eines Scrabbles gewählt (Abb. 23).


Abb. 23 Rätselhaftes Anagramm

Hübsch ist auch ein *Ringpuzzle*, das Schott in seinem Buch vorstellt (Abb. 24) und das ich nachgebaut hatte (Abb. 25).

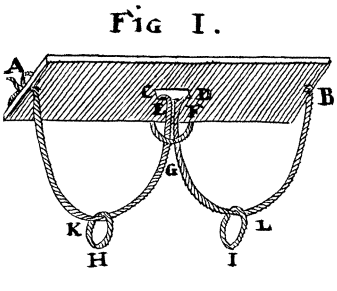


Abb. 24 Ringpuzzle, aus: (Kaspar Schott), *Ioco-seria naturae et artis*, zu S. 18, UB Würzburg

Abb. 25 Ringpuzzle

Allerdings hatte ich auch Schotts Lösung auf der Rückseite des Arbeitsblattes abgedruckt. Sonst wäre die Lösung nur schwer zu finden gewesen. Bei den Ringpuzzles handelt es sich aus mathematischer Sicht um „Entflechtungsprobleme".

## wunderbar berechenbar

So hatten wir die Ausstellung genannt. Und unser Cursus mathematicus hat das wohl auch als Botschaft herübergebracht. Sie erzeugte damit einen Effekt, mit dem Kaspar Schott seine Zeitgenossen für die Mathematischen Wissenschaften gewann. Es mag uns heute befremden, dass er sich mit dem Geheimnisvollen beschäftigte, das Erstaunen, vielleicht sogar Erschrecken auslöste. Indem er ihnen mit Hilfe der Wissenschaft verriet, was sich hinter den Phänomen verbirgt, wirkte er aufklärend. Die Fülle der wundersamen Phänomene, die sich z. B. bei Georg Philipp Harsdörffer, Jean Leurechon, Kaspar Schott und Daniel Schwenter finden, kann auch heute noch Erstaunen auslösen und „Mathematische Erquickstunden" erzeugen, um das mit dem historischen Titel auszudrücken (Abb. 26).

## Schluss

Aus didaktischer Sicht war der „Cursus mathematicus" ein Lernzirkel, der Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe einen Eindruck von den breit gestreuten Interessen eines Mathematikers des 17. Jahrhunderts vermittelte. Aus heutiger Sicht wurde Mathematik damals „fächerübergreifend" verstanden. Aber auch innerhalb der Mathematik im engeren Sinne machten die unterschiedlichen Phänomene häufig eine „themenübergreifende" Sicht erforderlich.

Schließlich wirkten die Problemstellungen „motivierend" und ihre Lösungen „erklärend". So kann der „Cursus mathematicus" Anregungen für die Entwicklung von Lernzirkeln im Schulunterricht geben. Denn auch im

Unterricht ist es möglich, mit entsprechenden Experimenten eine Brücke zwischen Vergangenheit und Gegenwart zu schlagen.


Abb. 26 Faszination einer Verschlüsselungsmaschine, Ausschnitt aus dem Titelbild von: Kaspar Schott, *Schola steganographica*, UB Würzburg

## Danksagung

Ich danke der Universitätsbibliothek Würzburg für die Genehmigung zum Abdruck der Abbildungen 3, 5, 7, 10, 13, 16, 19, 21, 24 und 26.

## Literatur

Harsdörffer, Georg Philipp, Schwenter, Daniel (1636, 1651, 1653): Deliciae Physico-Mathematicae, I–III. Nürnberg.. Neudruck: Berns, J. J. (Hrsg.): 1990. Frankfurt a. Main: Keip.

Herget, Wilfried, Jahnke, Thomas, Kroll, Wolfgang (2001): Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Berlin: Cornelsen.

Kircher, Athanasius (1650): Musurgia universalis. Rom.

Leurechon, Jean (1624): Recreations mathématiques. Reprint der englischen Übersetzung: Mathematicall Recreations. University of Michigan Library, 2009.

Schott, Kaspar (1657–1659): Magia universalis naturae et artis I–IV. Würzburg.

Schott, Kaspar (1661): Cursus mathematicus. Würzburg.

Schott, Kaspar (1664): Technica curiosa. Nürnberg.

Schott, Kaspar (1665): Schola steganographica. Nürnberg.

(Schott, Kaspar) (1677): Ioco-seria naturae et artis (deutsch). Bamberg.

Schott, Kaspar (1668): Organum mathematicum. Würzburg.

Vollrath, Hans-Joachim (Hrsg.) (2007): wunderbar berechenbar – Die Welt des Würzburger Mathematikers Kaspar Schott (1608–166). Würzburg: Echter.

Die Bücher von Schott finden sich als Digitalisate im Internet:

http://www.schott.franconica.de/login/index.php?link=front.html&left=werke

Einen Überblick über Schotts Leben und Werk gibt die Darstellung:

http://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/history/schott/