[107] Standortbestimmung mit einem Doppelwinkelmesser

In: Wilfried Herget und Silvia Schöneburg (Hrsg.): Mathematik – Ideen – Geschichte, Anregungen für den Mathematikunterricht. Festschrift für Karin Richter, Hildesheim (Franzbecker) 2011, 109-121

1 Einleitung

Mathematische Instrumente sind *Träger mathematischer Ideen*. Bei einem historischen Instrument kann das Suchen nach der zu Grunde liegenden Idee eine spannende Aufgabe sein. Für die technische Realisierung der Instrumente waren in der Regel außerdem technische und handwerkliche Ideen erforderlich, die es ebenfalls zu entdecken und zu würdigen gilt. Historische Instrumente sind häufig zugleich kunsthandwerklich gestaltet, was ihnen neben dem praktischen Wert auch einen ästhetischen Reiz verleiht. Moderne mathematische Instrumente haben häufig ein ansprechendes Design.

All dies kann historische mathematische Instrumente zu fruchtbaren Gegenständen des Mathematikunterrichts werden lassen. In den letzten Jahren sind dazu verschiedene Unterrichtsvorschläge gemacht worden. So ist z. B. von der mathematikdidaktischen Arbeitsgruppe um KARIN RICHTER in Halle der Pantograph im Rahmen von eingehenden Studien zu historischen Zeichengeräten gründlich für den Unterricht aufbereitet worden (Richter et al. 2001; Goebel et al. 2002; Richter 2002). Damit ergaben sich auch Verbindungen zu meinen eigenen Untersuchungen (Vollrath 1999; Vollrath 2004; Vollrath 2005; Vollrath 2006a). Aus Anlass ihres 60. Geburtstags möchte ich Frau Richter mit dem folgenden Beitrag meinen Dank für die gute Zusammenarbeit und meine Wertschätzung für ihr mathematikdidaktisches Wirken aussprechen.

2 Ein sowjetischer Doppelwinkelmesser

Beim Sammeln historischer Winkelmesser stieß ich vor einiger Zeit auf ein eindrucksvolles sowjetisches Instrument, das als *Protraktor* (engl. *protractor* = Winkelmesser) bezeichnet ist (Abb. 1). Hierbei handelt es sich um einen *Doppelwinkelmesser*.

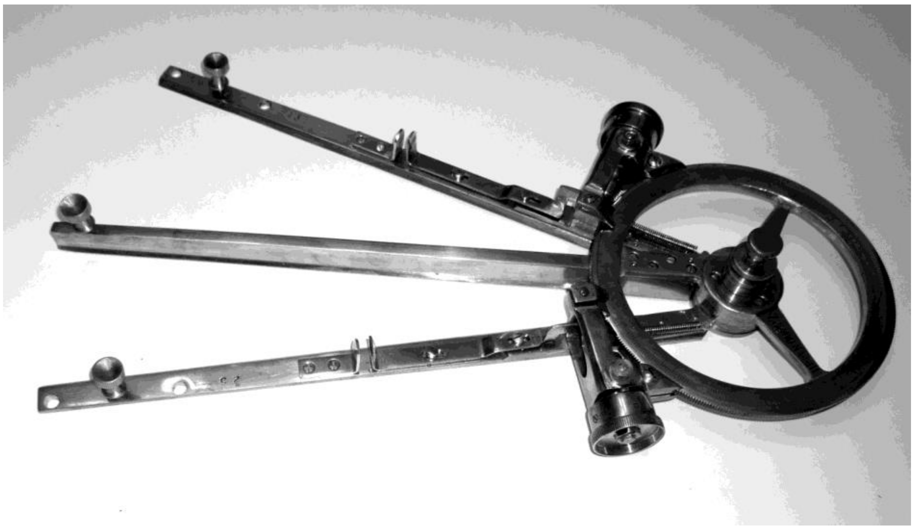

Abb. 1: Sowjetischer Protraktor

Das Gerät ist so eingerichtet, dass man mit ihm zwei nebeneinander liegende Winkel mit gemeinsamem Scheitel und einem gemeinsamen Schenkel messen kann (Abb. 2).

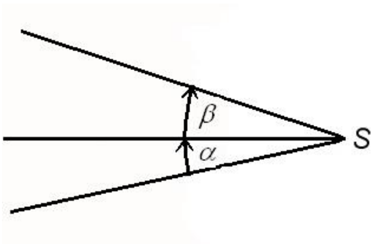

Abb. 2: Wink*elpaar mit gemeinsamem Scheitel* und einem gemeinsamen Schenkel

Den Scheitel kann man mit Hilfe einer Stahlspitze genau einstellen und auf der Unterlage durch Druck markieren. Auf dem Messkreis von 12,5 cm Durchmesser sind Winkel von jeweils 0° bis 180° in Gradeinteilung markiert. Drei Stäbe dienen als Schenkel der beiden Winkel. Das Gerät wird daher auch als *Dreiarmiger Winkelmesser* (engl. *three arm protractor*) bezeichnet.

Der mittlere Stab ist fest mit dem Messkreis verbunden. Eine Kante stellt den gemeinsamen Schenkel der beiden Winkel dar. Diese Kante weist auf 0° und auf den Scheitelpunkt. Die beiden äußeren Stäbe sind um den Scheitelpunkt drehbar. Ihre Innenkanten weisen ebenfalls auf den Scheitelpunkt hin und stellen die anderen Schenkel der beiden Winkel dar.

An den äußeren Stäben befinden sich Stellschrauben, mit denen sich der jeweilige Winkel auf Minuten genau einstellen lässt (Abb. 3).

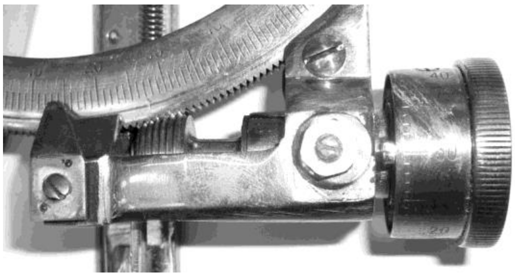

Abb. 3: Stellrad zur Feineinstellung

Am Messkreis ist ein Zahngewinde angebracht, in das ein Gewinde am Stellrad eingreift. Das ist eine der *technischen Ideen* an diesem Instrument. Als *handwerkliche Idee* betrachte ich die Einrichtung, dass sich die Stellräder mit Hilfe von jeweils zwei Schiebern auf den äußeren Stangen vom Messkreis abklappen lassen, damit man zunächst mit den Stäben grob die Gradeinteilung vornehmen kann. Anschließend stellt man mit den wieder eingerasteten Stellschrauben fein die Minuten ein. Gleichzeitig erzeugen die Stellräder einen Widerstand gegen unwillkürliche Veränderungen der Stäbe beim Hantieren.

An die drei Stäbe lassen sich Teile anschrauben, so dass die kompletten Schenkel dann jeweils eine Länge von 52,7 cm haben. Das Instrument (Nr. 86 227) ist vermessingt; ihm liegt ein „Pass“ bei, der das im Jahr 1986 angefertigte Messprotokoll des Herstellers enthält und angibt, mit welchen Fehlern bei der Messung der verschiedenen Winkelgrößen zu rechnen ist.

3 Der Doppelwinkelmesser als Navigationsinstrument

Bei dem Doppelwinkelmesser handelt es sich um ein *Navigationsinstrument* zur konstruktiv-geometrischen Bestimmung des Standortes eines Schiffs in Küstennähe (Abb. 4).

Abb. 4: Standortbestimmung mit dem kompletten Instrument auf einer Seekarte

Nehmen wir an, vom Schiff aus lassen sich drei markante Punkte *A*, *B*, *C* beobachten, die auf der winkeltreuen Seekarte eingetragen sind (Abb. 5). Wenn man die Orte vom Standort *S* aus nacheinander z. B. mit einem Sextanten anpeilt, dann kann man die Winkel α und β bestimmen. Sie werden auf dem Doppelwinkelmesser eingestellt. Nun wird das Instrument so auf die Seekarte gelegt, dass durch jeden der Punkte *A*, *B* und *C* je ein Schenkel geht. Der Scheitelpunkt ist der gesuchte Standort *S* des Schiffes auf der Seekarte. Dieser wird mit der Stahlspitze markiert.

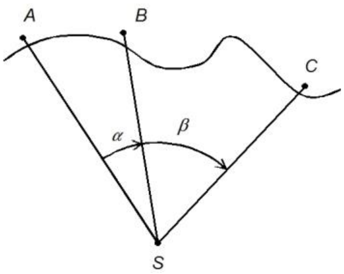

Abb. 5: Bestimmung des Standortes in Küstennähe

Die Verwendung des Doppelwinkelmessers als *Standort-Anzeiger* kommt deutlich in der englischen Bezeichnung *Station Pointer* zum Ausdruck. Denkt man an den beschriebenen Verwendungszweck des Gerätes, so ist dies die eigentlich angemessene Bezeichnung.

4 Ein deutscher Doppelwinkelmesser

Ein deutscher Doppelwinkelmesser, der in den 1940er Jahren von den Optisch-Mechanischen Werkstätten Ed. Sprenger, Berlin (cln 12893) für die Kriegsmarine hergestellt und nach dem Krieg vom Deutschen Hydrographischen Institut (DHI) in Hamburg verwendet wurde, ist im Wesentlichen nach dem gleichen mathematischen Prinzip gebaut (Abb. 6). Sein Messkreis besteht aus Neusilber, das übrige Instrument aus schwarz lackiertem Metall. Der Messkreis hat eine Einteilung in halbe Grad.

Abb. 6: Deutscher Doppelwinkelmesser

Der Feinmessung liegt allerdings eine andere technische Idee zu Grunde. Die Ablesung der Minuten erfolgt mit einer *Noniusskala* (Abb. 7). Um die Arme beim Verschieben zu arretieren, sind hier Klemmschrauben angebracht.

Abb. 7: Feineinstellung mit Noniusskala

5 Die mathematische Idee des Doppelwinkelmessers

Konnte man die Winkel α und β vom Standort aus messen, dann erscheint es plausibel, dass man das Gerät auf der Karte so anlegen kann, dass bei ausreichender Schenkellänge die drei Schenkel durch die drei Punkte gehen. Schwierigkeiten bereitet eher die Frage, ob es nur eine mögliche Lage gibt, ob also der Standort eindeutig bestimmt ist.

Anders gefragt: Kann es einem Seemann so gehen wie den Schildbürgern, die im Krieg ihre Glocke versenkten und die Stelle am Bootsrand markierten, über die das Seil mit der Glocke gerutscht war? Als der Krieg vorbei war, fanden sie wohl die Kerbe im Boot, nicht aber die Glocke.

Für die Standortbestimmung mit dem Doppelzirkel ergibt sich also die Frage, ob auch damit der Fall eintreten könnte, dass für den Standort mehrere Punkte in Frage kommen. Betrachten wir also die *mathematische Idee*, die diesem Instrument zu Grunde liegt, etwas näher. Der Doppelwinkelmesser ist zur Lösung folgender Aufgabe bestimmt:

> Zu drei gegebenen Punkten *A*, *B*, *C* ist der gemeinsame Scheitel *S* zweier Winkel α und β zu bestimmen, so dass $\measuredangle ASB = \alpha$ und $\measuredangle BSC = \beta$.

Nehmen wir zunächst das Teilproblem, den geometrischen Ort der Scheitel aller Winkel der Größe α zu finden, deren Schenkel durch zwei Punkte *A* und *B* gehen. Nach dem *Umfangswinkelsatz* und seiner *Umkehrung* sind dies die Kreisbögen AB und BA ohne die Endpunkte der Sehnen. Für unseren Fall brauchen wir nur einen der beiden Bögen, etwa AB zu betrachten. Eine entsprechende Überlegung führt darauf, dass die Scheitelpunkte von Winkeln der Größe β, deren Schenkel durch *B* und *C* gehen, auf den Kreisbögen BC und CB liegen, wiederum ohne die Punkte *B* und *C*. Hier betrachten wir BC . Für die Lösung unseres

Problems ist es notwendig, die möglichen Kreisbögen AB und BC und ihre Lage zueinander zu diskutieren. Dabei geht es um die Frage der Existenz von Schnittpunkten. Da der gemeinsame Punkt B der beiden Sehnen nicht zu den Kreisbögen gehört, ist in Abb. 8 der Punkt S der einzige Schnittpunkt, der zu den Winkeln α und β gehört.

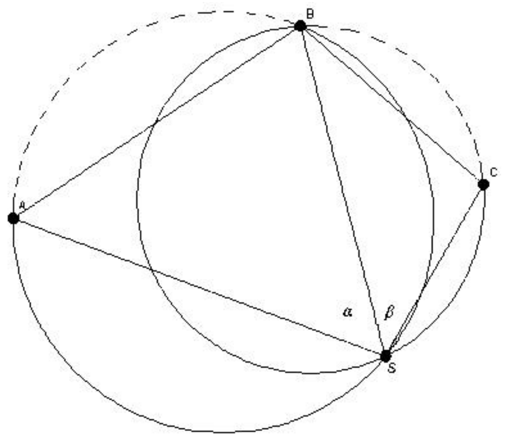

Abb. 8: Ein gemeinsamer Scheitelpunkt S

Erwischt man beim Anpeilen der drei Punkte A, B und C allerdings einen Punkt S, der auf dem Kreis durch A, B und C geht, dann haben AB und BC den Bogen AC gemeinsam (Abb. 9). In diesem Fall sind alle Punkte des Kreisbogens AC mögliche gemeinsame Scheitelpunkte. Hier versagt das Instrument. Dieser Kreis wird in der Nautik als „gefährlicher Kreis“ bezeichnet. Um ihn zu vermeiden, wird in der Praxis der Rat gegeben, drei Punkte so zu wählen, dass sie möglichst nahe an einer Geraden liegen.

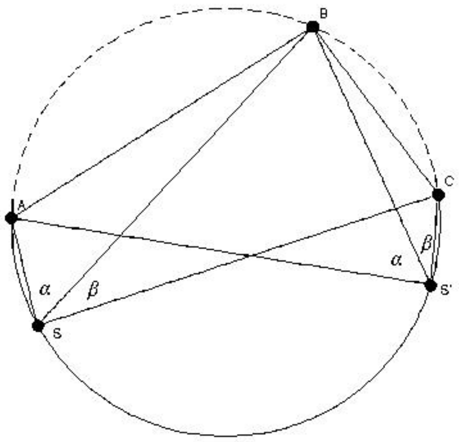

Abb. 9: Unendlich viele mögliche gemeinsame Scheitelpunkte

Aber auch der Fall ist möglich, dass sich die zugehörigen Kreise nur in *B* berühren. Da *B* nicht zu den Kreisbögen der Sehnen gehört, wäre dann keine Lösung vorhanden. Aber dieser Punkt kommt ja auch gar nicht als Standort in Frage.

Es bleibt freilich noch die Rolle der *Seekarte* zu klären. Seekarten für Küstenregionen gibt es in sehr unterschiedlichen *Maßstäben*. Die Seekarte in Abb. 4 des Deutschen Hydrographischen Instituts hat z. B. den Maßstab 1:50 000. Doch auch größere Maßstäbe wie 1:20 000 und kleinere Maßstäbe wie 1:200 000 sind üblich. Oben hatte ich beiläufig gefordert, dass die verwendeten Karten *winkeltreu* sind. Das ist aber eine wesentliche Forderung. Denn sie ist entscheidend dafür, dass ein Instrument für alle diese Karten verwendet werden kann.

6 Der Erfinder

Erfinder des Doppelwinkelmessers ist der englische Hydrograph und Kartograph MURDOCH MCKENZIE (1712–1797), der durch die Vermessung der Orkney Inseln bekannt wurde (Carr 2005). Dabei bediente er sich eines Messtisches, einer Messkette und des Theodoliten. Die Admiralität war so beeindruckt von seinen Karten, dass er beauftragt wurde, die gesamte Westküste von Großbritannien zu vermessen.

Im Jahr 1774 erschien sein Buch *A Treatise on Maritim [sic] Surveying*, das bald zu einem Standardwerk wurde. Darin beschreibt er auch ausführlich den *Station Pointer*. Zunächst gibt er dort allerdings ein einfaches zeichnerisches Verfahren an. Dazu werden die beiden Winkel α und β wie in Abb. 2 auf Transparentpapier gezeichnet. Dieses wird nun so auf der Seekarte verschoben, bis die Schenkel durch A, B und C verlaufen. Der Scheitel ergibt denn den Standort S auf der Karte. Im gleichen Jahr wurde MacKenzie zum *Fellow of the Royal Society* ernannt.

Der Station Pointer ist bis in die Gegenwart in der *Terrestrischen Navigation* verwendet worden. Es gab zahlreiche Hersteller hauptsächlich in England. Aber auch deutsche und japanische Instrumente sind bekannt. In Deutschland war gleichfalls die Bezeichnung *Stationszeiger* gebräuchlich. Schließlich sei noch darauf verwiesen, dass die Instrumente zugleich bei geodätischen Arbeiten verwendet werden können. Noch heute werden international klassische Instrumente aus Metall und obendrein einfache Instrumente aus Plastik angeboten.

7 Konstruktive Lösung des Standortproblems

Mit Kenntnis der Satzgruppe von den Winkeln am Kreis lässt sich die obige Aufgabe auch konstruktiv mit Zirkel und Lineal lösen. Das kann wie folgt vor sich gehen (Abb. 10): Man zeichnet zunächst drei Punkte A, B und C und zeichnet die Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$. Nun gilt es, die entsprechenden Kreise K_1 und K_2 zu finden. Der Mittelpunkt M_1 des Kreises K_1 liegt auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$. Nach dem Satz vom Mittelpunktswinkel ist dieser doppelt so groß wie der entsprechende Umfangswinkel. Man braucht also z. B. nur in B den Winkel $90° - \alpha$ anzutragen, dann liefert der Schnittpunkt des freien Schenkels mit der Mittelsenkrechten den gesuchten Mittelpunk M_1. Damit lässt sich nun der Kreis K_1 zeichnen. Entsprechend zeichnet man den Kreis K_2. Hat man einen der betrachteten Sonderfälle vermieden, dann liefert der Schnittpunkt S der beiden Kreisbögen AB und BC den gesuchten gemeinsamen Scheitel.

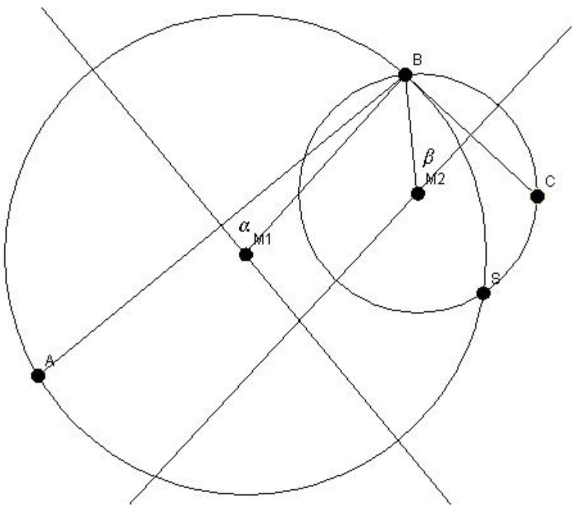

Abb. 10: Genau eine Lösung S

Fallen bei den gemessenen Winkeln die beiden Mittelpunkte zusammen, dann ergibt sich der Sonderfall unendlich vieler Lösungen (Abb. 11). Er tritt ein, falls

$$\alpha + \beta + \measuredangle CBA = 180° .$$

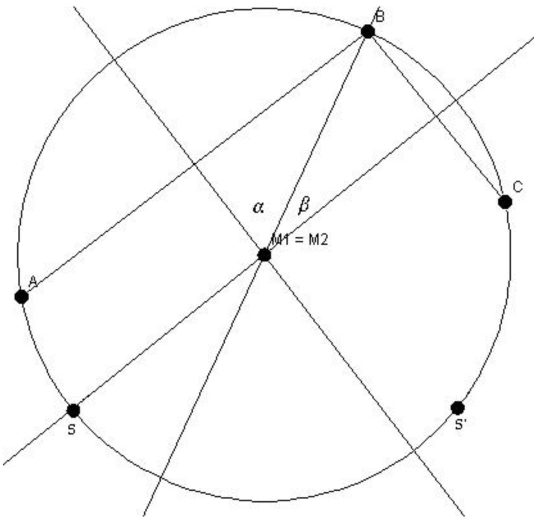

Abb. 11: Unendlich viele Lösungen beim Zusammenfallen der Kreise

Die Abbildungen in Abb. 8–11 wurden mit dem Dynamischen Geometrie-System (DGS) „Cinderella“ erstellt. Die Dynamisierung der gefundenen Figur, z. B. durch Ziehen am Punkt *A*, zeigt eindrucksvoll das Wandern des Punktes *S* und kann das Entstehen der Sonderfälle deutlich machen.

8 Die Ortsbestimmung mit dem Doppelwinkelmesser im Unterricht

Die hier behandelten Fragen sind alle im Mathematikunterricht der Sekundarstufe 1 zugänglich. Sie gehören dort zum Themenkreis der *Winkel am Kreis*. Die grundlegende Idee erschließt sich aus dem *Umfangswinkelsatz*, der *Umkehrung dieses Satzes* und dem *Satz vom Mittelpunktswinkel*. Das Instrument und seine Funktion sind eine interessante Anwendung dieser Satzgruppe. Hier einige Anregungen für den Unterricht:

- Zum *Umfangswinkelsatz* kann man z. B. mit der Frage hinführen, weshalb man die Sitzreihen im Theater kreisförmig anordnet. (Von allen Punkten eines Kreisbogens aus erscheint eine Sehne unter dem gleichen Sehwinkel.)
- Fragt man nun umgekehrt, wo die Scheitelpunkte von Winkeln der Größe α liegen, deren Schenkel durch die Endpunkte einer Strecke verlaufen, so stößt man auf Kreisbögen durch die Endpunkte der Strecke auf beiden Seiten der Strecke. Beschränkt man sich auf eine Seite der Strecke, dann ist das der entsprechende Kreisbogen ohne die Endpunkte der Strecke. Experimentell kann man dies mit einem Winkel kontrollieren, den man auf Transparentpapier (bzw. Folie) gezeichnet hat. Etwas anspruchsvoller ist die Realisierung mit einem DGS. Der zu Grunde liegende Satz ist die *Umkehrung des Satzes vom Umfangswinkel*.
- Die Frage, wie man den Mittelpunkt dieses Kreisbogens findet, beantwortet der *Satz vom Mittelpunktswinkel*.
- Als *Anwendung* dieser Satzgruppe kann man nun auf die Ortsbestimmung durch das Anvisieren von drei Punkten an der Küste eingehen. Wie man dann den Standort auf der Karte finden kann, lässt

man am besten zunächst wieder mit Hilfe von Transparentpapier klären (Abb. 12).

- Nun wird man auf den Doppelwinkelmesser verweisen. Mit Hilfe einer Landkarte (eines Stadtplans), eines Kompasses und Transparentpapiers lässt sich seine Funktionsweise auch im Gelände (Stadt) ausprobieren.
- Die Darstellung des Problems mit einem DGS erfordert das gedankliche Lösen des Konstruktionsproblems. (Im Wesentlichen geht es hier um das Finden der Mittelpunkte.) Eine systematische Dynamisierung führt auf die Entdeckung der Sonderfälle. Gedanklich ist dabei zu klären und zu begründen, wann sie eintreten.

Nach Behandlung der Trigonometrie könnte man die Ortsbestimmung mit dem Doppelwinkelmesser auch im Rahmen eines Projekts oder einer Facharbeit zum Thema „Navigation in Küstennähe“ (Terrestrische Navigation) bearbeiten lassen.

Schließlich bietet das Thema „Standortbestimmung mit dem Doppelwinkelmesser“ auch einen Ansatzpunkt, auf Kartenprojektionen und ihre Eigenschaften einzugehen.

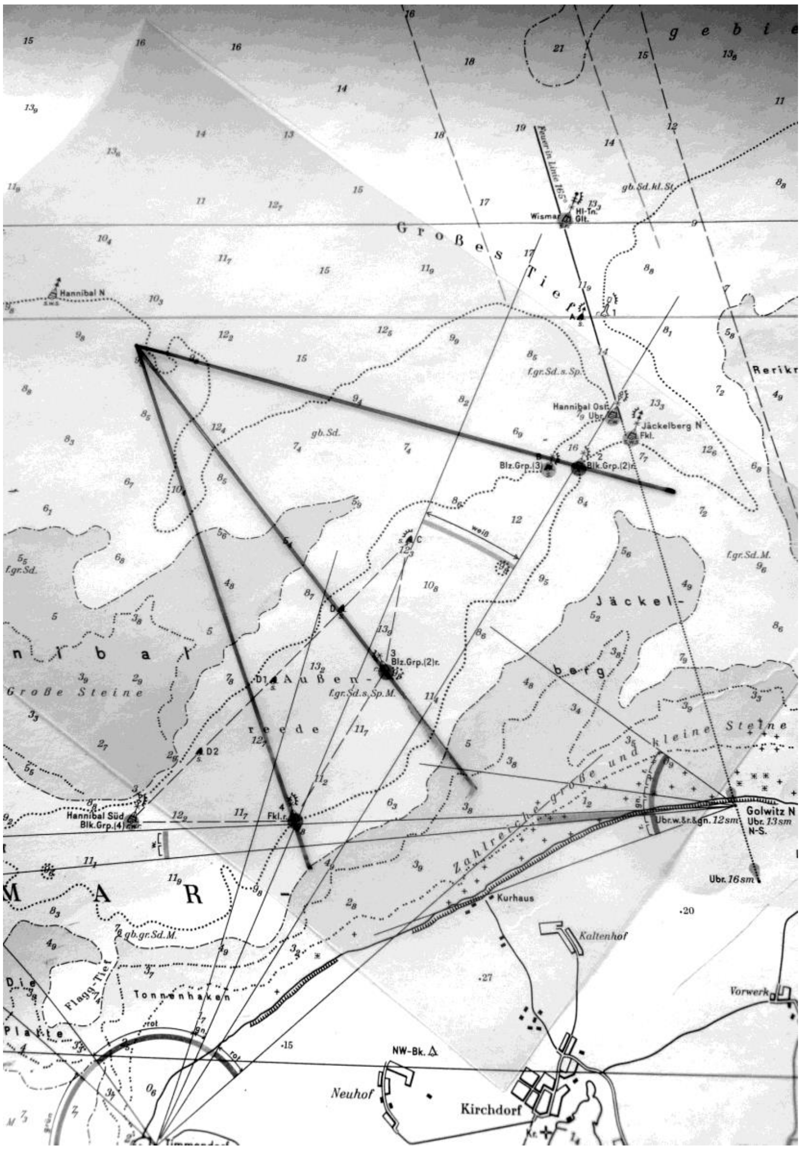

Abb. 12: Standortbestimmung mit Winkeln auf Folie

9 Schlussbemerkungen

Historische mathematische Instrumente sind Zeugnisse unserer wissenschaftlich-technischen Kultur, die es zu bewahren gilt. Im Mathematikunterricht sollten deshalb die Ideen dieser Kulturgüter erschlossen und damit im *kulturellen Gedächtnis* bewahrt werden (Anthes 1994; Richter et al. 2001; Vollrath 2003; Weigand 2005; Weth 2005). Hinweise auf derartige Instrumente und Erläuterungen zu ihrer Funktionsweise und Verwendung können ältere Menschen geben, die selbst noch mit ihnen gearbeitet haben. Auch ältere Lehrbücher enthalten häufig Abbildungen und Beschreibungen. Besonders eindrucksvoll sind natürlich originale Instrumente, die sich in Sammlungen finden. Berühmte Sammlungen sind in Deutschland im *Mathematisch-Physikalischen Salon* in Dresden, im *Deutschen Museum* in München und im *Arithmeum* in Bonn zu bewundern. Aber auch andere Museen stellen ausgewählte Instrumente aus. Interessante Sammlungen an Universitäten finden sich in *Göttingen*, *Greifswald*, *Halle* und *Würzburg*.

Schließlich kann man zu vielen Instrumenten auch im Internet Beschreibungen, Abbildungen und zum Teil sogar Funktionsmodelle entdecken. Sie können Schülerinnen und Schülern Anregungen für Projekte und Facharbeiten geben und werden in der Praxis auch immer wieder aufgesucht. So gibt es zu Pantographen z. B. Seiten aus Halle (Goebel/Malitte 2003) und aus Würzburg (Vollrath 2009). Auf Würzburger Seiten über eine Ausstellung historischer Winkelmesser findet sich auch eine Seite zum Doppelwinkelmesser (Vollrath 2006b).

Wenn sich Schülerinnen und Schüler mit historischen mathematischen Instrumenten eingehender beschäftigen, dann erwacht häufig auch der Wunsch, ein solches Instrument zu *basteln*. Für den Pantographen gibt es dazu einen hübschen Bastelbogen (Malitte, Richter, Sommer o. J.). Beim Doppelwinkelmesser ist die Zeichnung auf Transparentpapier ja bereits ein

Realisat, das durch das Buch von McKenzie sogar historisch belegt ist. (Dieses ist in der Ausgabe von 1819 als Digitalisat im Internet zugänglich.)

Literatur

Anthes, Erhard (1994): Mechanische Rechenmaschinen in der Schule. – In: Pickert, G./Weidig, I. (Hrsg.): Mathematik erfahren und lehren. – Stuttgart (Klett), S. 32–40.

Carr, Margaret (2005): Charting the life of the man who mapped Orkney. – In: The Orcadian Features, 19. September 2005.
(www.orcadian.co.uk/features/articles/mackenziemaps.htm [22.11.2010])

Goebel, Manfred/Malitte, Elvira/Richter, Karin/Schlosser, Heike/Schöneburg, Silvia/Sommer, Rolf (2002): Der Pantograph in historischen Veröffentlichungen des 17. bis 19. Jahrhunderts. – In: Reports on Didactics and History of Mathematics Univ. Halle 4 (2002).

Goebel Manfred/Malitte, Elvira (2003): Virtuelle Pantographen. – In: www.mathematik.uni-halle.de/institute/didaktik/pantograph/index.html [22.11.2010.

Mackenzie, Murdoch (1819): A treatise on marine surveying. 2. Aufl. – London.

Malitte, Elvira/Richter, Karin/Sommer, Rolf (o. J.): Bastelbogen für einen Pantographen. – In: did.mathematik.uni-halle.de/lehrerseite/zeichengeraete/pantograph_basteln.pdf [22.11.2010].

Richter, Karin, Gressling, Ellen/Malitte, Elvira/Sommer, Rolf (2001): Historische Zeichengeräte. – In: Mathe-Welt, mathematik lehren, H. 108, S. 26–50.

Richter, Karin (2002): Historical drawing instruments – on unexpected approaches to mathematical problems. – In: Creativity in mathematics education, Riga, S. 74–76.

Vollrath, Hans-Joachim (1999): Historische Winkelmessgeräte in Projekten des Mathematikunterrichts. – In: Der Mathematikunterricht 45 H. 4, S. 42–58.

Vollrath, Hans-Joachim (2003): Zur Erforschung mathematischer Instrumente im Mathematikunterricht. – In: Hefendehl-Hebeker, L./Hußmann, S. (Hrsg.): Mathematikdidaktik zwischen Fachorientierung und Empirie, Festschrift für Norbert Knoche. – Hildesheim: Franzbecker, S. 256–265.

Vollrath, Hans-Joachim (2004): Landvermessung mit einem Messtisch. – In: mathematik lehren 124, S. 20–22, 47–48.

Vollrath, Hans-Joachim (2005): Entdeckungen an Zirkeln. – In: Der Mathematikunterricht 51 H. 1, S. 4–18.

Vollrath, Hans-Joachim (2006a): Nikolaus Goldmanns Baustäbe – Ein Lehrmittel aus dem Würzburger Mathematischen Kabinett. – In: Journal für Mathematik Didaktik 27, S. 52–76.

Vollrath, Hans-Joachim (2006b): Historische Winkelmesser. – In: www.didaktik.mathematik.uni-uerzburg.de/history/ausstell/winkelmesser/index.html [22.11.2010].

Vollrath, Hans-Joachim (2009): Historische Pantografen. – In www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/history/vollrath/ausstellungen.htm [22.11.2010].

Weigand, Hans-Georg (2005): Kegelschnittzirkel – real und virtuell, – In: Der Mathematikunterricht 51 H. 1, S. 43–52.

Weth, Thomas (2005): Spiralzirkel. – In: Der Mathematikunterricht 51 H. 1, S. 53–59.