[104] Regeln lernen im Mathematikunterricht

In: Wilfried Herget und Karin Richter (Hrsg.), Mathematische Kompetenzen entwickeln und erfassen, Festschrift für Werner Walsch zum 80. Geburtstag, Hildesheim (Franzbecker) 2010, 151–163.

Zu Beginn des Wintersemesters 1954/55 erzählte uns Friedrich Wilhelm Levi in seiner Analysis-Vorlesung an der Freien Universität Berlin, dass es auch einen mathematischen Sündenfall gegeben habe. Danach hätte Gott den Menschen im Garten Eden die natürlichen Zahlen gegeben und ihnen erlaubt, nach Herzenslust zu addieren, zu subtrahieren, zu multiplizieren und zu dividieren. Doch er verbot ihnen, durch Null zu dividieren. Und die Schlange war listiger denn alle Tiere auf dem Felde und sprach zu dem Weib: „Ja, sollte Gott gesagt haben: Ihr sollt nicht durch Null dividieren?“ Nun, auch damit war die Schlange erfolgreich. Eva schaute die Null an und sah, dass man gut durch Null dividieren könnte und dass es eine lustige Zahl sei, die einen klug mache. Sie dividierte durch Null und ließ das auch ihren Mann tun. Da erkannten beide, dass sie nun nur noch die Null hatten. Denn setzt man $a : 0 = b$, dann folgt $a = 0 \cdot b = 0$ für alle a und b. In der Schule war uns die Division durch 0 *verboten* worden. Levi machte das nicht so autoritär, sondern zeigte uns die Konsequenzen und weckte damit die Einsicht, warum man besser nicht durch Null dividieren sollte. (Trotzdem probiere ich noch heute bei jedem Taschenrechner, der mir in die Hände kommt, wie er sich bei Division durch Null verhält.) Das schöne Büchlein von Walter Lietzmann, *Wo steckt der Fehler?* gibt eine ganze Reihe von Beispielen, bei denen eine unauffällige Division durch 0 zu einem falschen Ergebnis führt.

Die meisten Fehler im Mathematikunterricht lassen sich als Verstöße gegen gültige *Regeln* deuten. Was aber sind eigentlich Regeln im Mathematikunterricht?

1. Rechenregeln

1.1 Regeln in Kalkülen und Algorithmen

Bei Regeln in der Mathematik denkt man wohl zunächst allgemein an Rechenregeln, Teilbarkeitsregeln, Differentiations- und Integrationsregeln,

aber auch an spezielle Regeln wie die Kettenregel, die Simpsonsche Regel, die Cramersche Regel, die Sarrussche Regel oder die Nepersche Regel. An diesen Beispielen fällt auf, dass es fast immer um „Rechnungen“ geht. Das bezieht sich sowohl auf das Rechnen mit Zahlen, als auch auf das „Rechnen“ mit Funktionen. So spricht man ja z. B. von Differential*rechnung* und von Integral*rechnung*. Auch Termumformungen gehören in diesen Zusammenhang. Bei den Rechenregeln geht es um Anweisungen für das Lösen von Routineaufgaben. Bei den mit den Namen von Mathematikern verbundenen Regeln handelt es sich meist um Angebote, einen schwierigeren Aufgabentyp auf elegante Weise zu lösen. Im ersten Fall denkt man unwillkürlich an *Kalküle*, die nach bestimmten Regeln aufgebaut sind. (Im Englischen werden ja Differential- und Integralrechung als *calculus* bezeichnet.) Im zweiten Fall bilden die Regeln die Grundlage für *Algorithmen*.

Rechnungen werden durch Aufgaben ausgelöst, deren Ziel die Lösung der Aufgabe ist. Sie sind also zielgerichtete Handlungen, und dieses Handeln wird durch Regeln bestimmt. Dabei geben die Regeln *Anweisungen* oder fordern zu *Entscheidungen* auf.

Beispiel:

(1) *Addition gleichnamiger Brüche*

Gleichnamige Brüche werden addiert, indem man die Zähler addiert und den Nenner beibehält.

(2) *Addition beliebiger Brüche*

Sind die Brüche gleichnamig, addiert man nach Regel (1).

Sind die Brüche ungleichnamig, so macht man sie zunächst gleichnamig und addiert dann nach Regel (1).

Bereits an diesem einfachen Beispiel wird deutlich, dass komplexe Aufgaben *Hierarchien* von Regeln erfordern, denn sie setzen ja z. B. Regeln über das Rechnen mit natürlichen Zahlen sowie über das sogenannte „Gleichnamigmachen“ voraus.

1.2 Anforderungen an die Rechenregeln

An Rechenregeln werden einige grundsätzliche Anforderungen gestellt. Zunächst erwartet man von einer solchen Regel, dass sie zu einem *Ende* der Rechnung führt. Das ist nicht selbstverständlich, wie einem ja bereits das einfache Beispiel der Divisionsaufgabe 1:3 zeigt. Immerhin kann man die Rechnung in diesem Fall beenden, wenn man erkennt, dass sich der unendliche periodische Dezimalbruch $0,\overline{3}$ ergibt.

Das wichtigste Kriterium bei der Beurteilung einer Rechenregel ist ihre *Allgemeingültigkeit*: Die Anwendung der Regel soll *stets* zu einem richtigen Ergebnis (einer wahren Aussage) führen. Die Allgemeingültigkeit von Rechenregeln ergibt sich aus der zu Grunde liegenden arithmetischen Theorie. Sie kann sich unmittelbar aus einer *Definition* oder aus einem *Satz* ergeben.

Nehmen wir wieder das Beispiel der Addition von Brüchen. Je nach dem Aufbau der Theorie kann man die Formel

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

Summenformel

als *Definition* der Addition wählen oder als *Satz* beweisen. Im ersten Fall wird man nachweisen, dass diese Definition *zweckmäßig* ist. Das kann z. B. dadurch geschehen, dass man nachweist, dass sich für $b = d = 1$ die übliche Addition natürlicher Zahlen ergibt. Man wird aber auch die neu definierte Addition auf die grundlegenden Eigenschaften z. B. der Assoziativität, der Kommutativität und der Regularität untersuchen.

Im zweiten Fall wird man zeigen, dass sich die Formel herleiten lässt. Wenn man z. B. für natürliche Zahlen a und b definiert:

$$\frac{a}{b}=ab^{-1},$$

dann kann man die Summenregel wie folgt gewinnen:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=ab^{-1}+cd^{-1}=adb^{-1}d^{-1}+bcb^{-1}d^{-1}$$
$$=(ad+bc)(bd)^{-1}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

(Hier sind im Wesentlichen die Existenz von multiplikativen Inversen, die Assoziativität und Kommutativität von Addition und Multiplikation sowie die Distributivität vorausgesetzt.)

1.3 Die Reichweite der Regeln

Die Summenformel ist an sich auf den allgemeinen Fall zugeschnitten. Mit ihr könnte man natürlich auch als *allgemeine Regel* formulieren:

> Brüche werden addiert, indem man den Zähler des ersten Bruches mit dem Nenner des zweiten Bruchs multipliziert, dann den Zähler des zweiten Bruchs mit dem Nenner des ersten Bruchs multipliziert, schließlich die Summe dieser beiden Produkte als Zähler und das Produkt der beiden Nenner als Nenner wählt.

Aus dieser Regel kann man aber auch *spezielle Regeln* gewinnen, etwa für den Fall der Addition gleichnamiger Brüche oder den Fall der Addition einer natürlichen Zahl zu einem Bruch. Im zweiten Fall wird man als Regel formulieren, dass man die natürliche Zahl zunächst als Bruch mit dem Nenner 1 schreibt und dann die allgemeine Regel anwendet.

1.4 Entwicklung von Regeln

Die Beispiele zeigen, wie man im Rahmen einer Theorie Regeln gewinnen kann. Ist eine Formel vorhanden, so ist es meist nicht schwer, die „statische“ Formel gedanklich in ein „dynamisches“ Handlungsschema zu übersetzen. Häufig führen Sonderfälle zu speziellen Regeln. Natürlich können sich auch aus speziellen Regeln allgemeine Regeln ergeben. Schließlich entfalten sich zunehmend Regelhierarchien.

Häufig vollzieht sich die Entwicklung jedoch auch in umgekehrter Richtung: Im Umgang mit konkreten Objekten werden Erfahrungen gesammelt, die sich in Regeln niederschlagen und zur Entdeckung allgemeiner „Regelmäßigkeiten“ führen, die als „Gesetze“ formuliert werden und die Grundlage einer Theorie bilden können.

2. Rechenregeln im Unterricht

Die Beispiele aus der Bruchrechnung sollten an einem vertrauten Gegenstand des Mathematikunterrichts auf einige wichtige Sachverhalte im Zusammenhang mit Regeln hinweisen. Andererseits kann man an diesen Betrachtungen auch eine Reihe didaktischer Probleme deutlich machen.

Die bisherigen Überlegungen bezogen sich auf Routineaufgaben. Regeln beschränken sich freilich nicht darauf. Gerade komplexere Aufgaben erfordern die kombinierte Anwendung von Regeln. Häufig ergibt sich die Lösung erst nach einer Reihe von Teilschritten, in denen unterschiedliche Regeln angewendet werden müssen.

Anspruchsvollere Aufgaben können durchaus auch erfordern, sich aus vorhandenem Wissen erst eine Regel als Handlungsschema zu entwickeln, das zu der gesuchten Lösung führt.

2.1 Das Problem der Regelhierarchien

Beim Lehren des Zahlbegriffs wird im Mathematikunterricht ein *Lernen durch Erweiterung* angestrebt. Jeder neue Zahlbereich umfasst die bereits bekannten Zahlbereiche. Für das Rechnen im neuen Zahlbereich müssen neue Regeln angeeignet werden; andererseits wird dabei immer wieder auf vertraute Regeln der bisher bekannten Zahlbereiche zurückgegriffen. Aus didaktischer Sicht hat der Rückgriff auf bekannte Regeln den Vorteil, dass die Regeln nicht so leicht vergessen werden, weil sie immer wieder benötigt werden. Wenn allerdings die benötigten Regeln gar nicht oder nicht korrekt

erinnert werden, dann ist das Scheitern im neuen Bereich vorprogrammiert. Dann hilft nur noch ein gründlicher Neubau von Grund auf. Doch es muss nicht soweit kommen: Eine gründliche Vernetzung der Inhalte durch eine entsprechende Auswahl und Behandlung der Aufgaben kann dem Vergessen vorbeugen.

2.2 Das Problem der Regelpräsenz

Kaum jemand lernt Regeln verbal. Ausführlich formulierte Regeln sind im Grunde schwer verständlich und unübersichtlich. Ich selbst habe die obigen Bruchrechenregeln in dieser Ausführlichkeit erst in der Referendarzeit gelernt. Natürlich kannte ich sie aus meiner Schulzeit in „Kurzform“.

Ein hübsches Beispiel für die Kurzfassung einer Umformungsregel hat Martin Wagenschein bei einem Darmstädter Schüler beobachtet (Wagenschein 1970[2], S. 423): Die Regel, die sich aus der Beziehung

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

ergibt, drückte er so aus: „riwwer ruff – niwwer nunner!“

Beobachtet man beim Rechnen einen Regelverstoß, dann wird meist die Regel nachgefragt: „Wie werden ungleichnamige Brüche addiert?“ Ob damit allerdings die Ursache für den Regelverstoß behoben wird, ist fraglich, zumal häufig in Analogie zur Produktregel einfach nach der „Regel“ gerechnet wird: „Zähler plus Zähler, Nenner plus Nenner“ (Padberg 2002[3], S. 102–104).

Erfolgversprechender ist es, eine Regel grafisch als Schema zu veranschaulichen. (Wobei dann freilich das Verstehen des Schemas wiederum zu einem Problem werden kann.) Mit Hilfe des Computers ist es außerdem ohne Weiteres möglich, den Handlungsablauf optisch an Zahlenbeispielen unter akustischer Begleitung mit einer stichwortartigen

Beschreibung der einzelnen Schritte als „Film“ darzustellen und so das entsprechende Handlungsschema einzuprägen.

2.3 Das Problem der Einsicht in die Rechenregeln

Praktisch alle historischen Rechenbücher führen an Beispielen rezeptartig vor, wie man die entsprechenden Aufgaben löst. So teilt Adam Ries in seinem Rechenbuch von 1578 mit:

> „Haben die Brüch gleiche Nenner/so summir die Zehler/vnd schreib einen Nenner darunder/Wo nicht/so multiplicir Creutzweiß/addir zusamen/vnd setz vnder dasselbige die Nenner gemultiplicirt/wie hie.“ (S. 22)

Unter dem Einfluss von Christian Wolff bringen dann im 18. Jahrhundert die Rechenbücher auch Begründungen. So heißt es 1797 in den *Anfangsgründen*:

> „Weil die Nenner die Namen sind, so dürft ihr nur die Zähler addiren. Da man aber nur Zahlen von Einer Art zusammensetzen kann, so müsset ihr erst die Brüche unter Eine Benennung bringen, wenn sie verschiedene Nenner haben.“ (S. 38)

Wolff beschränkt sich zunächst auf den gleichnamigen Fall und knüpft dabei unmittelbar an die Bedeutung von Zähler und Nenner an. Dann begründet er, weshalb man so nicht auch im Fall ungleichnamiger Brüche vorgehen kann. Für diesen Fall weist er auf die Notwendigkeit hin, die Brüche gleichnamig zu machen und dann wie eben zu addieren. Jeder Schritt in dem von Wolff vollzogenen Gedankengang ist auf Einsicht gegründet. Die von Wolff angegebenen Regeln sind natürlich auch geschickt gewählt. Die Summenformel, auf deren Grundlage Ries seine Regel formuliert hat, wäre wesentlich schwieriger und aufwändiger einsichtig zu machen.

Dass man Einsicht wecken kann, indem man Beziehungen zur Lebenswelt, etwa den Geldbeträgen herstellt, wird von einigen historischen Autoren zwar erwähnt, nur selten aber auch genutzt. Das ist umso verwunderlicher, als ja

bei Geldbeträgen durchaus noch lange mit gewöhnlichen Brüchen umgegangen wurde.

Die große Bedeutung der Anschauung für das schulische Lernen wurde erst unter dem Einfluss der Ideen von Johann Heinrich Pestalozzi (1746–1827) erkannt und im Unterricht genützt. Doch vor allem am Gymnasium wurden Möglichkeiten der Veranschaulichung im Mathematikunterricht nur zögerlich aufgegriffen. So kritisierte Martin Wagenschein vor allem dort noch viel „Dressur des Unverstandenen“ (Wagenschein 1970[2], S. 12).

2.4 Problem des schematischen Arbeitens

Andererseits fand es Wagenschein irritierend, dass anscheinend viele Schüler Freude am rein algorithmischen Arbeiten im Mathematikunterricht haben (Wagenschein 1970[2], S. 218). Die Zuverlässigkeit der Regeln, das weitgehende Fehlen von Ausnahmen, die Möglichkeit, selbst schwierige, umfangreiche Aufgaben jeweils nach einem bestimmten Schema lösen zu können, all das gibt Sicherheit und vermittelt auch Erfolgserlebnisse. Es ist für viele junge Menschen durchaus ein ästhetisches Erlebnis, wenn ein komplizierter Term nach etlichen Umformungsschritten eine ganz einfache Gestalt annimmt, oder eine anscheinend schwierig zu lösende Gleichung dann schließlich doch zu einer ganzzahligen Lösung führt. Zudem sollte man nicht verkennen, dass es in der Mathematik immer auch ein Anliegen ist, schwierige Probleme durch leistungsfähige Algorithmen zur Routine werden zu lassen.

2.5 Problem der Kreativität

Bei vielen Aufgaben, die im Mathematikunterricht gestellt werden, gibt es mehrere Lösungswege. Etliche davon werden auch von Schülerinnen und Schülern selbst entdeckt. Manche dieser Wege führen nur bei bestimmten Ausgangsdaten zum Ziel. Das ist an sich nicht schlimm, denn durch eine einschränkende Bedingung am Anfang kann man daraus eine Regel

gewinnen. Für die Addition der gleichnamigen Brüche ist das eben die Bedingung: „Wenn die Brüche gleichnamig sind“. Von den Schülern selbst gefundene Regeln leiden allerdings häufig darunter, dass sie nicht allgemeingültig sind. Die Lernenden sollten dazu angehalten werden, neue Regeln immer auf Allgemeingültigkeit zu prüfen.

Bei neuen Aufgaben, die zunächst „Probleme“ darstellen, wird man nach dem Lösen eine Reflexionsphase vorsehen. In ihr geht es darum, aus dem entdeckten Lösungsweg eine Regel herauszulösen, die aus dem Problem eine Routineaufgabe macht. Dass die Schüler ohnehin dazu neigen, eigene Regeln zu entwickeln, von denen etliche untauglich sind, sollte nicht negativ bewertet werden. Vielmehr sollte den Schülern gezeigt werden, wie man Regeln kritisch betrachtet und konstruktiv korrigiert.

3. Methodische Regeln

Die bisher behandelten Regeln beziehen sich jeweils auf konkrete mathematische Sachverhalte. In den gewählten Beispielen ging es um das Lösen ganz bestimmter Aufgaben oder Probleme. Die Regeln ergeben sich unmittelbar aus den zu Grunde liegenden mathematischen Theorien.

Darüber hinaus gibt es übergeordnete Regeln, die sich allgemein auf die Tätigkeit des Lösens von Aufgaben beziehen. Sie gehören zu den *methodischen Regeln*. Diese haben weitgehend empfehlenden Charakter und gründen auf Erfahrung. Sie versprechen Erfolg, ohne ihn garantieren zu können.

Eine klassische Sammlung von derartigen Empfehlungen sind die *Regeln zur Ausrichtung der Erkenntniskraft* von René Descartes (Descartes 1926). In der 2. Regel wird von ihm Mathematik als Vorbild zuverlässiger Wissenschaft dargestellt. In der 13. Regel wird er dann konkreter:

> „Wenn wir ein Problem vollkommen verstehen, so ist es von jedem überflüssigen Begriff abzulösen, auf seine einfachste Form zu bringen und in einer Aufzählung in möglichst kleine Teile aufzuteilen.“ (S. 107)

Dieser Rat erinnert an manche Ratschläge unserer Zeit zum Problemlösen.

3.1 Heuristische Regeln

Klassisch ist ja die Regel, sich bei einem Problem klar zu machen, was gegeben und was gesucht ist. Insbesondere sind hier die Regeln für erfolgreiches Problemlösen von Polya zu nennen. Er empfiehlt ein Handlungsschema in *vier Phasen* (Polya 1967[2], S. 18–33): In der ersten Phase geht es um das *Verstehen der Aufgabe.* Hier rät er, zu klären, was gegeben und was gesucht ist. In einer zweiten Phase folgt das *Bewusstmachen von Zusammenhängen und die Entwicklung eines Planes.* Hier sind die Fragen angebracht: Kannst du das Problem anders formulieren? Kennst du ähnliche Probleme? Es folgt eine dritte Phase mit der *Ausführung des Plans* mit Fragen wie: Was willst du erreichen? Was weißt du? Nach gefundener Lösung wird man in einer letzten Phase *Rückschau halten, um die Lösung und den Lösungsweg zu durchdenken.* Dazu dienen Fragen wie: Stimmt deine Überlegung? Kannst du das Ergebnis auch anders finden? Für die Lernenden erwachsen diese heuristischen Einsichten aus erfolgreichem Problemlösen in einem *Lernen durch Reflexion.*

3.2 Regeln für das Definieren

Nach dem Vorbild der *Elemente* des Euklid begannen Jahrhunderte lang mathematische Theorien mit Definitionen. Für das Definieren gibt Blaise Pascal in seiner Schrift *Von der Kunst zu überzeugen* einige Ratschläge. So schreibt er:

> „Zur Definition der Begriffe nur Worte zu benutzen, die vollkommen bekannt oder bereits erklärt sind.“ (S. 113)

Oder für den Umgang mit Begriffen:

> „Niemals die Zweideutigkeit der Begriffe dadurch missbrauchen, dass man vernachlässigt, im Geiste die Definitionen einzusetzen, die sie einschränken oder erklären.“ (S. 114)

Für den Mathematikunterricht hat sich Elisabeth Fuhrmann 1973 in ihrem Buch *Zum Definieren im Mathematikunterricht* mit diesem Thema befasst. Für den Umgang mit Definitionen sind folgende Ratschläge hilfreich (Vollrath 1994, S. 256): Stelle fest, welcher Begriff definiert wird! Was ist der zugrunde gelegte Oberbegriff? Mach dir die definierende Eigenschaft klar! Suche Beispiele und begründe, dass es sich um Beispiele handelt! Kannst du Gegenbeispiele angeben? Mach dir die Beziehungen zu anderen Unterbegriffen klar!

3.3 Regeln für das Beweisen

Auch zum Beweisen äußert sich Pascal:

> „Einen jeden Satz, der etwas unklar ist, zu beweisen und zum Beweis nur völlig evidente Axiome oder Sätze zu benutzen, die man bereits angenommen oder bewiesen hat.“ (S. 114)

In seinem Buch *Zum Beweisen im Mathematikunterricht* gibt Werner Walsch 1972 einige Ratschläge, die man beim Führen eines Beweises beachten sollte (S. 155–156).

Zunächst geht es um das volle *Verstehen* des zu beweisenden Sachverhalts. Dazu dienen z. B. folgende Impulse: „Überprüfe, ob du alle vorkommenden Begriffe und Redeweisen verstehst! Informiere dich über unbekannte Termini! Kann man den zu beweisenden Satz in Voraussetzung und Behauptung gliedern?“

Sodann wird man sich eine Übersicht über vorhandene *Hilfsmittel* verschaffen. Dazu dienen Impulse wie: „Kennst du Sätze, die gleiche oder

ähnliche Voraussetzungen enthalten wie der zu beweisende Satz? Erinnere dich an die Definitionen der vorkommenden Begriffe!“

Dem unmittelbaren *Finden* des Beweises dienen Fragen wie: „Was folgt aus den gegebenen Voraussetzungen? Sind in den bisherigen Überlegungen schon alle Voraussetzungen benutzt worden?“

Der *Kontrolle* des Beweises dienen die Fragen: „Prüfe nach, ob jeder Beweisschritt eine Berechtigung hat! Ist die Schlussweise zulässig? Sind alle möglichen Fälle berücksichtigt?“

Da es sich bei dem Finden eines Beweises um das Lösen eines Problems handelt, finden sich hier natürlich im Prinzip die Regeln des Problemlösens wieder.

3.4 Regeln für schöpferisches Handeln

Bei den bisher angeführten Beispielen mathematischen Arbeitens können Schülerinnen und Schüler eigene Ideen einbringen. Wirklich schöpferisch tätig können sie beim Bilden neuer Begriffe werden. Als Grundlage dafür kann Jacques Hadamards Theorie des mathematischen Erfindens dienen (Hadamard 1949). Aus didaktischer Sich befasste sich Thomas Weth 1999 eingehender mit schöpferischer Begriffsbildung in seinem Buch *Kreativität im Mathematikunterricht*. Danach vollzieht sich selbstständiges Bilden von Begriffen in mehreren Phasen: Es beginnt mit einer *Anregungsphase*, in der sich die Schülerinnen und Schüler mit einem interessanten Phänomen befassen. Sie mündet in eine Phase des Gewinnens einer *Idee*, der sich dann eine Phase des *Definierens* anschließt. Hier kommen dann wieder die Regeln des Definierens ins Spiel. In einer kritischen *Reflexion* geht es darum, Umfang und Inhalt des neu gebildeten Begriffs zu erkunden. Schließlich werden Beziehungen zu verwandten Begriffen gesucht, so dass sich der neue Begriff in ein *Begriffsnetz* einordnet. Zahlreiche Beispiele finden sich bei Vollrath (1987) und Weth (1999).

4. Verhaltensregeln

Im Folgenden soll noch eine Gruppe von Regeln angesprochen werden, die sich ganz allgemein auf das Verhalten im Mathematikunterricht beziehen und für erfolgreiches Lernen im Mathematikunterricht von Bedeutung sind.

4.1 Zielorientierung

Für den gesamten Mathematikunterricht ist es wesentlich, dass den Lernenden klar ist, worum es eigentlich geht. Das gilt sowohl für das Gespräch in der Gruppe als auch für das Arbeiten des Einzelnen. Probleme beim Verstehen haben häufig ihre Ursache darin, dass schon die angestrebten Ziele unklar sind. Es ist daher *Zielorientierung* als Verhaltensweise zu empfehlen. Konkret sollte z. B. beim Bearbeiten einer Aufgabe klar sein, wann sie als gelöst betrachtet werden kann. Beim Beweisen sollte man wissen, was zu zeigen ist, so dass man dann am Ende erleichtert sagen kann: Was zu beweisen war (klassisch: *quod erat demonstrandum*)!

4.2 Kontrollen

Zu den Grunderfahrungen aller Menschen gehört die Fehleranfälligkeit des eigenen Handelns. Das gilt in besonderem Maße für mathematisches Denken und Handeln. Eine weitere wichtige Verhaltensregel besteht daher in der Selbstverständlichkeit von *Kontrollen*. Bei den einzelnen Schritten einer längeren Rechnung oder Umformung tut man also gut daran, nach ihrer Zulässigkeit zu fragen.

Ich erinnere mich noch daran, wie mein Mathematiklehrer mich nervte, wenn ich ihm eine Überlegung vortrug. Nach jedem Satz unterbrach er mich mit der für mich damals banalen Frage: „Warum?“ Ich habe gelernt, diese unangenehmen Unterbrechungen zu vermeiden, indem ich jeden meiner Gedankenschritte mit einer Begründung *begann*: „Weil …, deshalb …“

Das klassische Instrument zur Kontrolle der Lösung von Aufgaben ist die *Probe*. Sie scheint mir etwas in Vergessenheit geraten zu sein. Es ist übrigens interessant, dass heute auch beim Umgang mit dem Taschenrechner Proben durchaus erforderlich sind.

4.3 Disziplin

Zu den nicht besonders beliebten allgemeinen Verhaltensregeln, die für fruchtbares mathematisches Arbeiten wichtig sind, gehört die Forderung nach *Disziplin*. Ich erlaube mir hier nur einige kritische Fragen: Ist der heute übliche Geräuschpegel im Unterricht dem mathematischen Denken zuträglich? Fördert das Hören von Musik das Problemlösen? Ist das „Abschalten“ und das „Meditieren“ (Dösen!) während einer Erläuterung der Lehrkraft dem Verstehen förderlich?

4.4 Zum Lehren von Verhaltensregeln

Für das Lehren von Verhaltensregeln gelten im Grunde die klassischen pädagogischen Regeln, die zwar von Generation zu Generation einem Wandel unterliegen, doch ihre Gültigkeit behalten: Verhaltensregeln nennen, begründen und auf ihre Einhaltung dringen; Verhaltensmuster vorleben; aus negativen Erfahrungen lernen lassen („Aus Erfahrung wird man klug.“); Verhaltensmuster möglichst früh einfordern („Was Hänschen nicht lernt, lernt Hans nimmermehr.“).

Schlussbemerkungen

Die vorangegangenen Betrachtungen setzen Überlegungen zum Lernen von Regeln fort, die ich 1994 in der *Algebra in der Sekundarstufe* angestellt habe. Ich sehe sie im Einklang mit Ausführungen von Hans Bock und Werner Walsch über „Verfahren und Mittel rationellen Arbeitens“ in der *Methodik Mathematikunterricht* aus dem Jahr 1975 (Walsch, Weber 1975). Mit ihnen möchte ich Herrn Kollegen Walsch meine Anerkennung und freundschaftliche Verbundenheit ausdrücken.

Literatur

Descartes, René: Regeln zur Ausrichtung der Erkenntniskraft. In: Rainer Specht (Hrsg.): René Descartes: Philosophische Schriften. Hamburg (Meiner) 1996.

Fuhrmann, Elisabeth: Zum Definieren im Mathematikunterricht. Berlin (Volk und Wissen) 1973.

Hadamard, Jacques: The Psychology of Invention in the Mathematical Field. Princeton (University Press) 1949.

Lietzmann, Walter: Wo steckt der Fehler? Leipzig (Teubner) 1950.

Padberg, Friedhelm: Didaktik der Bruchrechnung. Heidelberg (Spektrum) 2002^3.

Pascal, Blaise: Von der Kunst zu überzeugen. In: Reinhold Schneider (Hrsg.): Pascal. Frankfurt (Fischer) 1954.

Polya, George: Schule des Denkens, Bern (Francke) 1967^2.

Ries, Adam, Rechenbuch. Frankfurt 1578.

Vollrath, Hans-Joachim: Begriffsbildung als schöpferisches Tun im Mathematikunterricht. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 19 (1987), 127–136.

Vollrath, Hans-Joachim: Algebra in der Sekundarstufe. Mannheim (BI) 1994.

Wagenschein, Martin: Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken I. Stuttgart (Klett) 1970^2.

Walsch, Werner: Zum Beweisen im Mathematikunterricht. Berlin (Volk und Wissen) 1972.

Walsch, Werner und Karlheinz Weber (Hrsg.): Methodik Mathematikunterricht. Berlin (Volk und Wissen) 1975.

Weth, Thomas: Kreativität im Mathematikunterricht. Hildesheim (Franzbecker) 1999.

Wolff, Christian: Neuer Auszug aus den Anfangsgründen aller Mathematischen Wissenschaften. Marburg (Akademische Buchhandlung) 1797.