[84] Problemorientierung als didaktisches Prinzip

In: P. Baptist (Hrsg.), Mathematikunterricht im Wandel - Bausteine für den Unterricht, Bamberg (Buchner) 2000, 31-45

1. Einleitung

Einige Monate nach einem Unterrichtsgespräch über das Nicht-Abbrechen der Primzahlenfolge erhält MARTIN WAGENSCHEIN den Brief einer Schülerin, in dem sie schreibt:

> „Sie ahnen nicht, wie aufregend es war. Wir dachten wirklich an nichts anderes ... Mathematik war für mich immer der Inbegriff der Langeweile gewesen, und ich konnte kaum verstehen, wie dieses herrliche Erlebnis auch Mathematik heißen konnte ... Als wir nach mehreren Tagen die Aufgabe gelöst hatten, waren wir so stolz, als wenn das Primzahlenproblem uns unser ganzes Leben lang geplagt hätte und wir die ersten Menschen seien, die den Beweis gefunden hatten.“ (WAGENSCHEIN 1970, S. 110)

Was war an dem Unterricht so aufregend? WAGENSCHEIN hatte zunächst das Problem entfaltet, indem er herausarbeitete, daß die Abstände von Primzahl zu Primzahl immer größer werden, so daß man vermutet, es gäbe eine größte. Aber gibt es diese wirklich?

Dieses Problem hatte die Schüler gepackt. WAGENSCHEIN konnte sich zurücknehmen und es die Schüler selbst in der Gruppe bearbeiten lassen. Er schaute nicht auf die Uhr: fünf Unterrichtsstunden war ihm das Thema wert. Die Schüler machten Lösungsversuche, verwarfen sie wieder, diskutierten und dachten sogar in ihrer Freizeit weiter über das Problem nach. Schließlich fanden sie die Lösung.

Im Zentrum des Unterrichts steht ein klassisches Problem der Mathematik. Die Schülerinnen und Schüler erleben das Entstehen einer Vermutung, das Ringen um einen Beweis, schließlich die Freude an der gefundenen Lösung. Der Unterricht ist *problemorientiert.*

Der Unterrichtserfolg hatte sicher etwas mit der Qualität des Problems zu tun. Es ist eine der „Perlen“, mit denen immer wieder nachgewiesen wird, daß Mathematikunterricht „anders“ sein kann. Das hatte ja auch die Schülerin sehr stark empfunden. WAGENSCHEINS Unterricht profitierte von diesem Kontrast. Er rechtfertigt die Wahl des Themas und den Zeitaufwand damit, daß die Problemstellung und seine Lösung durch EUKLID *exemplarisch* für Mathematik sind.

WAGENSCHEIN konnte sich deshalb freimachen vom „Stoffdruck“, unter dem Schüler und Lehrer sonst leiden. So gewann er Zeit, das Problem und seine Lösung zu entwickeln. Sein Unterricht war *genetisch*.

Die Schüler erfuhren die Lösung als etwas Überraschendes, das ihnen neue Erkenntnis vermittelte und sie reich belohnte für ihre Mühen. Der Unterricht bot ihnen also eine Chance für *entdeckendes Lernen.*

In seinem Unterricht beobachten wir einen *Wechsel der Sozialformen*: Nach dem Lehrervortrag folgten Gesprächsphasen, aber auch Phasen, in denen die Schülerinnen und Schüler sich selbständig oder in Kleingruppen um eine Lösung des Problems bemühten.

In der Analyse verwenden wir didaktische Begriffe, die sich auf wichtige Entscheidungen über Auswahl und Behandlung der Inhalte im Mathematikunterricht beziehen. Häufig werden mit ihnen *didaktische Prinzipien* formuliert (KARASCHEWSKI 1969, WITTMANN 1974). So spricht man vom *Prinzip der Problemorientierung,* vom *exemplarischen Prinzip,* vom *genetischen Prinzip* oder vom *Prinzip des entdeckenden Lernens.*

Didaktische Prinzipien sind Anweisungen für Entscheidungen und Handlungen des Unterrichts, die auf das Erreichen von Unterrichtszielen gerichtet sind (WITTMANN 1975, DREWS 1976). Sie sind Bestandteile didaktischer Theorien und sollen das Unterrichtshandeln prägen. Wir erkennen in dem Beispiel von WAGENSCHEIN das Ineinandergreifen verschiedener didakti-

scher Prinzipien. Damit wird deutlich, daß es problematisch wäre, Unterricht nur von *einem* didaktischen Prinzip her zu sehen.

Genau dies ist jedoch z. B. in der Auswertung der TIMSS geschehen, wenn der Mathematikunterricht in Japan mit dem Mathematikunterricht in Deutschland verglichen wird und man zu dem Ergebnis kommt:

> „Japanischer Mathematikunterricht ist Problemlöseunterricht. Er schult mathematisches Verständnis und mathematisches Denken. Mathematikunterricht in Deutschland und den USA ist eher Wissenserwerbsunterricht, der auf Beherrschung von Verfahren zielt.“ (BAUMERT, LEHMANN u.a. 1997, S. 215)

Gerade auch im Hinblick auf diese Aussage erscheint es notwendig, näher auf das Prinzip der Problemorientierung des Mathematikunterrichts einzugehen.

Man kann das *Prinzip der Problemorientierung* als Aufforderung formulieren:

> *Der Mathematikunterricht ist an Problemen zu orientieren.*

Diese Formulierung bedarf der Erläuterung. Zunächst ist zu klären, was unter einem *Problem* zu verstehen ist.

2. Probleme

Im allgemeinen wird bei uns heute unter einem mathematischen Problem eine mathematische Aufgabe verstanden, bei der sich eine Lösung für den Problemlöser *nicht unmittelbar* ergibt, weil er zunächst eine *Lösungsbarriere* erfährt, die den Weg zur Lösung versperrt. Um eine Lösung zu finden, werden *Kenntnisse und Fähigkeiten* benötigt, die zwar notwendig zum Finden einer Lösung sind, aber eben noch nicht hinreichen. Vielmehr ist es notwendig, in einer *Lösungsidee* die relevanten Kenntnisse und Fähigkeiten zu aktivieren und damit einen *Lösungsweg* zu beschreiten.

Das Problemlösen ist in den letzten 50 Jahren intensiv erforscht worden. Wesentliche Impulse hat die *Heuristik* durch POLYA (1949, 1962, 1963) erhalten. Analog zur Formalisierung der Logik hat man sich auch um eine Formalisierung der Heuristik bemüht (FISCHER 1996, S. 157-203). Dazu war es notwendig, sehr formal über Probleme, Lösungswege und Lösungen zu sprechen. Die Ergebnisse dieser Forschungen haben ihren Niederschlag in Vorschlägen zum *Lehren des Problemlösens* gefunden (z. B. ZECH 1996, S. 306-368). In ihnen geht es darum, den Schülern heuristische Kenntnisse und Fähigkeiten zu vermitteln. Problemlösen bezieht sich dabei auf Aufgaben, bei denen der Problemcharakter im Vordergrund steht und die Inhalte von untergeordnetem Interesse sind. Die Probleme haben also eher den Charakter von „Knobelaufgaben“.

Was als Problem angesehen wird, hängt allerdings auch von der jeweiligen Kultur ab. Während man in der deutschen Tradition bei Problemen in erster Linie an „Knobelaufgaben“ denkt, werden in USA auch Routineaufgaben als "problems" bezeichnet. Im Gegensatz zu Problemaufgaben sind *Routineaufgaben* dadurch gekennzeichnet, daß bei ihnen der Lösungsweg bekannt ist.

Der Problemcharakter einer Aufgabe ist im wesentlichen durch die Fähigkeiten und Kenntnisse bestimmt, über die der Lösende in einer bestimmten Situation verfügt. Dieses *subjektive* Moment ist verantwortlich dafür, daß eine Aufgabe für sich genommen nicht als Problem- oder als Routineaufgabe klassifiziert werden kann.

Wenn also z. B. die TIMSS (BAUMERT, LEHMANN u.a. 1997) Fähigkeiten im *Ausführen von Routine-Prozeduren* und zum *Lösen von Problemen* ("Solving Problems") mit entsprechenden Aufgabentypen messen will, dann liegt der Klassifikation der Aufgaben bereits eine Einschätzung der zu erwartenden Fähigkeiten bei den Testpersonen zugrunde.

Beispiel:

„In welchem Verhältnis steht bei einem Quadrat die Länge einer Seite zur Länge des Umfangs?

A. $\frac{1}{1}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

(BAUMERT, LEHMANN u.a. 1997, S. 72)

Mit dieser Aufgabe soll die Fähigkeit gemessen werden, Probleme zu lösen. Im Lichte der obigen Auffassung sind jedoch unterschiedliche Einschätzungen dieser Aufgabe möglich.

Es könnte sein, daß ein Schüler weiß, daß bei einem Quadrat die Länge einer Seite und die Länge des Umfangs im Verhältnis

1 oversm 4 zueinander stehen. Dann wird einfach nur „Wissen“ abgefragt.

Wenn der Schüler weiß, daß der Umfang eines Quadrats 4 mal so lang ist wie die Seitenlänge und er weiß, wie man eine Aussage über Vielfache in eine Aussage über Verhältnisse übersetzen kann, dann ist die Aufgabe für ihn eine „Routineaufgabe“.

Weiß er mindestens einen der beiden Sachverhalte nicht, dann wird die Aufgabe für ihn tatsächlich zu einer „Problemaufgabe“.

Haben die Lernenden überhaupt noch keine Vorstellungen über die Beziehung zwischen Seitenlänge, Umfang und Flächeninhalt eines Quadrats, dann handelt es sich hier weder um eine Routineaufgabe, noch um eine Problemaufgabe. Vielmehr zielt diese Aufgabe dann auf den Zusammenhang zwischen Umfang und Seitenlänge eines Quadrats.

Man würde allerdings in diesem Fall bei uns zunächst nicht nach dem Verhältnis fragen. Denn wir denken heute eher in funktionalen Abhängigkeiten und in Formeln. Statt dessen könnte die Frage lauten:

Welche Beziehung besteht zwischen Umfang und Seitenlänge eines Quadrats?

Und man würde den Schülern auch keine Antworten vorgeben, um ihr Denken nicht zu stark zu kanalisieren.

Wird diese Frage erstmals im Unterricht gestellt, dann ist sie geeignet, den Schülern eine neue Einsicht in das Quadrat zu vermitteln, die Strategien zum Lösen von Routineaufgaben liefert aber auch als Grundlage für Problemlösungen geeignet ist. Sie eröffnet überdies eine neue Betrachtungsweise bei Figuren, die zu weiteren Einsichten führen kann. Es handelt sich also um ein *weiterführendes Problem*, das über sich hinausweist und damit ein viel stärkeres Gewicht als eine Knobelaufgabe hat, obwohl es im Sinne des Problemlösens nicht unbedingt „schwieriger“ ist.

3. Probleme in historischer Sicht

In der Mathematikgeschichte ist der Begriff des Problems relativ offen. Bei EUKLID (um 300 v. Chr.) sind z. B. die Konstruktionsaufgaben Probleme. Ihre Lösung ergibt sich meist unmittelbar aus Postulaten, Theoremen oder bereits gelösten Problemen (VOLLRATH 1991). EUKLIDS Theorie sorgt im Grunde dafür, daß aus Problemen Routineaufgaben werden.

Das Halbieren eines Winkels mit Zirkel und Lineal ist ein solches Problem, das durch seine Theorie zur Routineaufgabe wird. Bereits im Altertum konnte das analoge Problem, einen Winkel mit Zirkel und Lineal in drei gleich große Teile zu zerlegen, nicht gelöst werden, bis es sich schließlich in der Neuzeit als unlösbar erwies.

Ähnlich ging es mit dem Problem der Quadratur der Vielecke, das sich im Licht der „Elemente“ als Routineaufgabe darstellte, während das Problem der Quadratur des Kreises ein weiteres der ungelösten Probleme des Altertums

darstellte, von dem erst in der Neuzeit die Unlösbarkeit nachgewiesen werden konnte.

Doch auch dieses Problem wirkt relativ eng. Das wesentlich umfassendere Problem ist die Bestimmung des Flächeninhalts, das sich wie ein roter Faden als *grundlegendes* Problem durch die Mathematikgeschichte zieht und bei dem sich bis in unsere Tage immer neue Aspekte ergeben.

In der Entwicklungsgeschichte der Mathematik zeigt sich ein Wechselspiel zwischen Theoriebildung und Problemstellungen. Über die enge Verbindung zwischen Sätzen und Problemen schreibt bereits PROKLUS in seinem Euklid-Kommentar:

> „Jede Wissenschaft ist zweifacher Art: Entweder bemüht sie sich um die unmittelbaren Sätze, oder sie liefert, gestützt auf diese, Beweise und Konstruktionen, zieht überhaupt Folgerungen aus den Prinzipien und entwickelt so ihr System. Die unsere scheidet sich bei der Behandlung der Geometrie in die Erledigung der Probleme und die Gewinnung von Lehrsätzen. Sie bezeichnet als *Probleme* Aufgaben, bei denen sie sich zum Ziele setzt, nicht Vorhandenes ausfindig zu machen, ans Licht zu bringen und zu beschaffen, als *Theoreme* aber Sätze, durch die sie das, was zutrifft oder nicht zutrifft, sehen, erkennen und beweisen will.“ (PROKLUS 1945, S. 307)

Wir wollen die Beziehungen zwischen Problemen, Begriffsbildungen, Sätzen und Beweisen etwas näher betrachten.

4. Probleme, Begriffe, Sätze und Beweise

In einer fertigen mathematischen Theorie sind Begriffe undefinierte Grundbegriffe oder sie werden definiert. In Axiomen und Sätzen werden Aussagen über Begriffe gemacht. Bei den Sätzen werden diese bewiesen. Probleme sind meist nur implizit vorhanden. Beim Entstehen von Mathematik geht die Dynamik jedoch von den Problemen aus. Wir wollen uns das an dem Thema „Kreistangente“ klarmachen.

Auf den Begriff der Tangente kommt man z. B., wenn man die Frage stellt, welche Beziehungen zwischen Kreis und Gerade bestehen können. Die Tangente ergibt sich hier als eine Lösung des Problems.

Dieser Begriff erweist sich nun als Quelle neuer Problemstellungen. Man wird z. B. fragen, wie man eine Tangente in einem Punkt an einen Kreis zeichnet. Diese Frage erweist sich als recht anspruchsvolles Problem.

Die entscheidende Lösungsidee wird beim Einzeichnen des Berührungsradius in einer Planfigur gefunden. Sie führt auf die Entdeckung des Satzes:

Die Tangente an einen Kreis ist senkrecht zu ihrem Berührungsradius.

Mit Hilfe dieses Satzes kann nun sofort das Problem gelöst werden, wie man eine Tangente in einem Punkt P des Kreises an den Kreis konstruieren kann. Das Finden eines Beweises für diesen Satz ist dabei ein eigenes Problem.

Nachdem man das Konstruktionsproblem gelöst hat, ergibt sich sofort ein weiteres: Zu konstruieren sind die Tangenten von einem Punkt außerhalb des Kreises an den Kreis. Auch dazu kann man den Satz heranziehen. Man muß ihn nur noch mit dem Satz des Thales in Verbindung bringen und hat dann den Lösungsweg gefunden.

Die Lösung des Konstruktionsproblems liefert bei EUKLID mit der Konstruktionsbeschreibung einen Algorithmus, der aus dem Problem eine Routineaufgabe macht und heute sogar vom Computer ausgeführt werden kann.

Der Satz selbst kann aber auch die Frage aufwerfen: Ist jede Senkrechte in einem Kreispunkt P zum Radius $\overline{MP}$ eine Tangente? Sie erweist sich als neues Problem.

Diese Betrachtungen machen deutlich: Wenn man Mathematik treibt, dann ergeben sich Begriffsbildungen als *Lösungen von Problemen*. Die Begriffe erweisen sich dann als *Quellen neuer Probleme*. Die *Lösungsidee* kann zu neuen Sätzen oder neuen Begriffen führen. Bei der *Durchführung des Lö-*

sungsweges sind Begriffe, Sätze und bereits gelöste Probleme die entscheidenden Hilfsmittel. Häufig ist es möglich und sinnvoll, für die Lösungen Algorithmen zu entwickeln, um sie praktisch verwenden zu können. Das Finden eines geeigneten Algorithmus kann ebenfalls ein Problem darstellen.

Dieses lebendige *Beziehungsgefüge* zwischen Problemen, Begriffen, Sätzen, Beweisen und Algorithmen ist im Mathematikunterricht zu entwickeln, um mit den Schülern Mathematik entstehen zu lassen.

5. Einseitigkeiten

Im Mathematikunterricht besteht die Gefahr, bestimmte Aspekte des mathematischen Tuns überzubetonen. Das hat eine lange Tradition.

In den „Elementen“ des EUKLID finden sich Probleme, Definitionen, Sätze und Beweise, ja bis zu einem gewissen Grad sogar Algorithmen in einer *Abhandlung*, in der diese Theorieelemente miteinander verbunden sind. Doch die Dynamik ihres Entstehens bleibt dem Leser verborgen.

Älter ist die Tradition der *Aufgabensammlungen.* Mit ihnen sollten meist praktische Bedürfnisse von Landvermessern, Baumeistern, Kaufleuten und Beamten befriedigt werden (GERICKE 1984). Für Mathematiker war die „Arithmetik“ des DIOPHANTUS aus Alexandria (um 250 n.Chr.) gedacht, die eine reine zahlentheoretische Aufgabensammlung darstellt.

In den Werken des ARCHIMEDES dagegen findet man Probleme meist nur in den Vorworten, in der Abhandlung selbst allenfalls implizit. Er beschränkt sich im wesentlichen auf die Mitteilung von Sätzen und Beweisen.

Diese Lehrbuchtraditionen finden auch in den Schulbüchern ihren Niederschlag. Als reine Aufgabensammlung berühmt geworden ist „der BARDEY" (BARDEY 1904). Ein solches Buch hätte heute keine Chance als Schulbuch

zugelassen zu werden. Diese Tradition hat allerdings bis zu einem gewissen Grad in den „Schülerübungsheften“ überlebt.

Schulbücher enthalten meist knappe Theorieteile und dann vor allem Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades. Befragungen von Lehrern zeigen, daß die meisten von ihnen Schulbücher in erster Linie als *Aufgabensammlungen* verwenden (SCHMIDT 1984). Die Theorie lassen sie von den Schülern von der Tafel oder der Projektionsfläche abschreiben, diktieren sie oder stellen sie auf Informationsblättern für die Hand der Schüler dar.

Aufgaben spielen im Mathematikunterricht nach wie vor eine zentrale Rolle, wenn er auch nicht mehr von der *Aufgabendidaktik* geprägt ist, die HELGE LENNÉ 1969 so eindrucksvoll beschrieben hat:

> „Jedes Teilgebiet ist durch einen Aufgabentypus bestimmt, der systematisch von einfachen zu komplexen Formen hin abgehandelt wird. Komplexe Aufgaben lassen sich dabei als Kombinationen einfacher Aufgaben auffassen. Die einzelnen Gebiete zeigen so in sich eine strenge Systematik. Sie sind jedoch untereinander wenig verknüpft, sondern werden jeweils relativ isoliert behandelt. ‚Anwendungsaufgaben‘ werden jedem Gebiet *gesondert* zugeteilt, und nur die Reihenfolge der Gebiete wird so festgelegt, daß ein Gebiet möglichst die notwendigen Voraussetzungen für die nächstfolgenden liefert. Gebiete, die einmal behandelt worden sind, gelten insoweit als erledigt; der betreffende Stoff wird als bekannt vorausgesetzt; Querverbindungen anhand übergreifender Ideen oder Strukturen werden – jedenfalls systematisch – kaum grundsätzlich herausgearbeitet. Es gilt stets ‚das haben wir gehabt‘ oder ‚das haben wir noch nicht gehabt‘.“ (LENNÉ 1969, S. 34-35)

Angeprangert werden hier nicht die Aufgaben, sondern es wird kritisiert, daß der ganze Unterricht nur von Aufgaben her geplant und realisiert wird. Bemängelt wird das Fehlen „übergreifender Ideen“.

Ein solcher Unterricht ist deshalb auch nicht dadurch zu heilen, daß man einfach den Anteil der *Problemaufgaben* erhöht. Er wäre dann immer noch einseitig und würde ein verzerrtes Bild von Mathematik geben. Problemorientierung kann also nicht heißen, im Mathematikunterricht ausschließlich Problemaufgaben zu stellen und lösen zu lassen.

6. Problemorientierung

Die Forderung, Mathematikunterricht an Problemen zu *orientieren*, soll ausdrücken, daß in allen *Phasen* des Mathematikunterrichts Probleme die entscheidenden Impulse geben. Das bezieht sich also auf die Phasen der Begriffsbildung, der Erkundung von Zusammenhängen, der Erarbeitung von Sätzen, der Entwicklung von Algorithmen, des Problemlösens, des Modellbildens und Anwendens sowie des Übens.

Wenn in der DDR seit Mitte der siebziger Jahre ein *problemhafter Mathematikunterricht* propagiert wurde, dann war damit ebenfalls gemeint, die Schüler zu Beginn der einzelnen Unterrichtsphasen „in eine *Problemsituation* zu versetzen“ (PIETZSCH o.J.). PIETZSCH gibt Beispiele für die Erarbeitung von Begriffen und für die Erarbeitung von Sätzen.

Im folgenden wollen wir einige Hinweise für Problemorientierung in unterschiedlichen Phasen geben.

(1) Erarbeitung von Begriffen

Problemorientierte Begriffsbildung bedeutet, Begriffe in *Problemzusammenhänge* einzubinden. Das ist in der Regel auf vielfältige Weise möglich.

Die Bildung des Begriffs Primzahl kann man z. B. der Problemstellung unterordnen, welche Teiler eine natürliche Zahl besitzt. Sie führt auf die Beobachtung, daß jede natürliche Zahl durch 1 und durch sich selbst teilbar ist. Das führt wiederum auf die Frage, ob es natürliche Zahlen gibt, die genau

zwei Teiler haben. Aus dieser Fragestellung ergibt sich der Begriff der Primzahl. Doch auch die Frage nach den „kleinsten multiplikativen Bausteinen“ der natürlichen Zahlen führt auf diesen Begriff.

Ist der Begriff gebildet, dann werden sofort weitere Fragen ausgelöst: Wie lauten die ersten 10 Primzahlen? Wie kann man die Primzahlen finden, die kleiner als 100 sind? Gibt es gerade Primzahlen? Wie kann man bei einer Zahl möglichst schnell herausfinden, ob sie eine Primzahl ist? Gibt es eine größte Primzahl?

Problemstellungen lösen also den Begriffsbildungsprozeß aus. Dabei kann er unterschiedliche Rollen im Problemlöseprozeß spielen: Er kann zur *Präzisierung des Problems* dienen, kann *Hilfsmittel zum Finden der Lösung* sein oder sich gar selbst *als Lösung des Problems* ergeben. Ist der Begriff gebildet, dann wird er in der Regel zur *Quelle für Problemstellungen.* (VOLLRATH 1984)

(2) Erarbeitung von Sätzen

Problemorientiertes Erarbeiten von Sätzen folgt im wesentlichen zwei Mustern (PIETZSCH o.J.). Bei der Lösung eines Problems erweist sich eine *Vermutung* als die entscheidende Lösungsidee. Bei der Suche nach einer Formel für den Flächeninhalt des Parallelogramms ist z. B. die entscheidende Idee, ein flächen-inhaltsgleiches Rechteck zu finden. Dafür gibt es unterschiedliche Möglichkeiten. Zunächst wird man dabei anschaulich vorgehen. Erst ein *anschließender Beweis* sichert die Problemlösung. Das Finden des Beweises ist selbst wieder ein Problemlöseprozeß. Diesem Muster folgte auch obiges Beispiel über den Satz, daß die Tangente senkrecht zum Berührungsradius ist. Das Bilden einer Vermutung und das anschließende Beweisen bezeichnet PIETZSCH als *reduktives* Vorgehen (PIETZSCH o.J., S. 48).

Der Satz kann auch am Ende eines Problemlöseprozesses stehen, bei dem der Lösungsweg im Grunde die *Herleitung* des Satzes darstellt. PIETZSCH spricht

hier vom *deduktiven* Vorgehen. Sucht man z. B. einen Zusammenhang zwischen den Lösungen x_1 und x_2 einer quadratischen Gleichung (in der Normalform $x^2 + px + q = 0$ und ihren Koeffizienten p und q, so kann man $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ ansetzen und dann umformen in

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0.$$

Hieraus liest man nun unmittelbar die gesuchte Beziehung ab. Damit ist der Vietasche Wurzelsatz *hergeleitet.* Ähnlich findet man die binomischen Formeln, den Sinussatz oder die Produktregel der Differentiation.

(3) Erarbeitung von Algorithmen

Konstruktionsprobleme und Berechnungsprobleme in der Geometrie, das Lösen von Gleichungen, die Berechnung von Näherungswerten veranlassen zur Suche von Algorithmen. Damit ist meist unmittelbar eine Problemstellung gegeben.

Für eine bestimmte Problemstellung können häufig unterschiedliche Algorithmen gefunden werden. Dies schafft für die Schülerinnen und Schüler einen Anreiz, eigene Lösungen zu suchen. Der Vergleich unterschiedlicher Algorithmen, der Versuch Algorithmen zu verbessern und schließlich Algorithmen so aufzubereiten, daß der Computer nach ihnen arbeiten kann, sind Problemstellungen, die sich zwanglos nach dem Finden eines Algorithmus ergeben. Auch hier kann also ein Algorithmus als Lösung eines Problems und als Auslöser neuer Probleme dienen.

(4) Problemlösen

In einem problemorientierten Mathematikunterricht haben Problemlösephasen natürlich zunächst die Aufgabe, den Schülerinnen und Schülern einen Anreiz zur intensiven Auseinandersetzung mit Problemen zu bieten. Sie sollen erfahren, daß in der Mathematik Lösungen von Problemen einem selten in den Schoß fallen, sondern daß sie das Ergebnis intensiven Nachdenkens sind mit den Frustrationen bei erfolglosen Versuchen und der Freude beim

schließlichen Finden der Lösung. Wichtig ist dabei daß sich die Lehrenden nach dem *Prinzip der minimalen Hilfe* beim Problemlösen selbst weitgehend zurückhalten.

Problemlösephasen sollen aber vor allem dazu dienen, den Problemlösern heuristische Strategien bewußt zu machen. In dieser Phase spielen die Lehrenden eine wichtige Rolle als „Experten“, die in Reflexionsphasen grundlegende heuristische Einsichten vermitteln können. Dazu gibt es in der Literatur zahlreiche Hinweise (z. B. ZECH 1996). Problemlösen kann z. B. für Wettbewerbe auch trainiert werden (z. B. BAPTIST 1992). Von diesen Erfahrungen kann auch der „normale“ Unterricht profitieren.

(5) Modellbilden und Anwenden

Viele mathematische Sachverhalte lassen sich durch Probleme aus Umweltsituationen durch *Modellbildung* erschließen. So werden proportionale Funktionen meist aus Umweltsituationen gewonnen. Man weiß z. B. daß 3 kg einer Ware 5 DM kosten und möchte wissen, wieviel 6 kg der Ware kosten. Indem man annimmt, daß zur doppelten Warenmenge der doppelte Preis gehört, findet man die Lösung. Dieser Annahme liegt das Modell der proportionalen Warenmenge-Preis-Funktion zugrunde. Die Mathematik hilft, durch eine Problemtransformation, eine Problemlösung zu finden.

Erschließung mathematischer Begriffe und Sachverhalte durch Modellbildung kann regelrecht zu einem *Programm* für den Unterricht werden. Man kann dies *historisch* rechtfertigen, weil viele mathematische Begriffe auf diese Weise entstanden sind. Durch eine *Realitätsnähe* des Unterrichts, will man aber auch den Schülerinnen und Schülern die Bedeutung der Mathematik deutlich machen und sie für die Beschäftigung mit dem entsprechenden mathematischen Problem *motivieren*.

Umgekehrt kann man insbesondere Verfahren zur Lösung bestimmter mathematischer Problemtypen häufig auf Umweltsituationen *anwenden*. Auch

dieses Vorgehen läßt sich historisch belegen. So ist die Formelsprache der Algebra im 16. Jahrhundert zunächst aus der Arithmetik als ein „Rechnen mit Buchstaben“ erwachsen (VOLLRATH 1994). Formeln eroberten sich bald praktisch alle Gebiete, in denen mit Mathematik gearbeitet wird. Das gilt auch für die unterschiedlichsten Bereiche der Mathematik. Sie wurden damit auch zu einem der wichtigsten Werkzeuge für Anwender. Entsprechendes gilt für die Methoden der Analysis.

Für Modellbildung und für Anwendung ist im Unterricht das Verstehen der Problemstellung aus der Umwelt die entscheidende Schwierigkeit. Sie ist vor allem deshalb von prinzipieller Natur, weil das Verstehen einerseits Voraussetzung zum erfolgreichen Problemlösen ist, weil aber andererseits dieses Verstehen eben gerade erst durch die Modellbildung möglich wird. Ein eindringliches Beispiel für diese Situation ist der Begriff der Geschwindigkeit. Einerseits sammelt der junge Mensch Erfahrungen über Bewegungen und Geschwindigkeiten aus dem täglichen Leben. Andererseits ist es für beliebige Bewegungen überhaupt erst mit der Differentialrechnung möglich, den Begriff der Geschwindigkeit zu bilden und damit auch zu verstehen.

Problemorientiertes Modellbilden und Anwenden von Mathematik bedeutet also, daß beide Schritte von Problemen ausgelöst werden und dann wiederum neue Probleme erzeugen.

(6) Üben

Beim Üben denkt man in erster Linie an Routineaufgaben, die zum Aneignen von bestimmten Verfahren dienen: an das Rechnen, an das Termumformen, an das Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen, an das Konstruieren, an das Berechnen von geometrischen Größen, an die Bestimmung von Ableitungen und Integralen. Weil die Beherrschung dieser Verfahren häufig zu einem erfolgreichen Problemlösen benötigt werden, ist zumindest indirekt auch bei diesen Aufgaben eine Beziehung zum Problemlösen gegeben.

Andererseits wird von Didaktikern immer wieder vor einer „Ideologie des Übens“ gewarnt, die sich in der Überzeugung äußert, man müsse nur lange genug üben, dann würden es die Schüler schon lernen (z. B. MALLE 1993). Insbesondere WINTER hat neue Perspektiven für das Üben eröffnet (1984), indem er das Üben von grundlegenden Prinzipien her betrachtet. Dabei hebt er auch die besondere Bedeutung des problemorientierten Übens hervor.

Das Gewicht der in den einzelnen Phasen gestellten Probleme ist unterschiedlich. Bei der Erarbeitung von Begriffen, Sätzen und Algorithmen, auch beim Modellbilden und Anwenden wird man in erster Linie *richtungweisende Probleme* verwenden. Beim Problemlösen und auch bis zum gewissen Grade beim Üben haben *Knobelaufgaben* ihre Berechtigung. Beim Üben haben sicher *Routineaufgaben* ihre Funktion und ihre Berechtigung, doch sollte sich das Üben nicht in derartigen Aufgaben erschöpfen.

7. Orientierungen

Richtungweisende Probleme sind geeignet, in den verschiedenen Unterrichtsphasen das Fragen in eine bestimmte Richtung zu lenken. Insofern geben sie selbst eine gewisse *Orientierung*. Andererseits darf Unterricht nicht eine bloße Abfolge unterschiedlicher Phasen sein, die zwar in sich an bestimmten Problemen orientiert sind, ohne daß übergeordnete Ziele erkennbar sind.

Mathematikunterricht bedarf daher einer übergeordneten Orientierung. Das können *Themenstränge* (VOLLRATH 1994) bzw. *Linienführungen* (WALSCH, WEBER 1975) sein wie z. B. Zahlen, Funktionen, Größen, Figuren und Körper, Abbildungen, oder *fundamentale Ideen* (SCHWEIGER 1992) wie z. B. Vergleich, Operation, Abhängigkeit, Variation, Approximation, Optimierung.

In den Themensträngen gibt es *grundlegende* Problemstellungen, an denen während der ganzen Schulzeit gearbeitet werden kann. Für Zahlen sind z. B.

grundlegende Probleme, nach welchen Regeln das Rechnen erfolgt und welche Gleichungen lösbar sind. Bei den geometrischen Abbildungen sind grundlegend, wie Bilder konstruiert werden können und welche Invarianten eine Abbildung besitzt. Bei den Flächeninhalten ist die Frage grundlegend, wie man zu einer gegebenen Figur den Flächeninhalt bestimmen kann.

Das Wort „Orientierung“ wird auch in Verbindung mit anderen Prinzipien verwendet. So spricht man z. B. von Anwendungsorientierung, Handlungsorientierung, Strukturorientierung, Systemorientierung, Wissenschaftsorientierung, Projektorientierung. Damit sollen bestimmte Akzentsetzungen des Unterrichts erreicht werden. Häufig sind sie Ausdruck bestimmter pädagogischer Modeströmungen, mit denen Defizite des Unterrichts behoben werden sollen und die dann häufig selbst zu neuen Einseitigkeiten führen.

Auch das Prinzip der Problemorientierung ist nicht sicher vor dieser Gefahr. Wesentlich für die Fruchtbarkeit dieses Prinzips ist die Qualität der Probleme, die für die jeweilige Unterrichtssituation gewählt werden, und die Qualität des Unterrichts beim Bearbeiten der Probleme. Für den Unterrichtserfolg insgesamt ist jedoch entscheidend, daß die unterschiedlichen Prinzipien zusammenwirken, sich ergänzen, unter Umständen auch miteinander konkurrieren.

Literatur

Archimedes: Werke. A. Czwalina (Übers.), Darmstadt :Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1983

Baptist, P., Die Entwicklung der neueren Dreiecksgeometrie, Mannheim (BI) 1992

Bardey, E., Aufgabensammlung, Leipzig (Teubner) 1904

Baumert, J., R. Lehmann u.a.: TIMSS! Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Opladen: Leske&Budrich 1997

Diophantos aus Alexandria, Arithmetik. A. Czwalina (Übers.), Göttingen (Vandenhoeck&Ruprecht) 1952

Drews, U. (Hrsg.), Didaktische Prinzipien, Berlin (Volk und Wissen) 1976

Euklid: Die Elemente. C. Thaer (Übers.), Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1962

Fischer, W.L., Mathematikdidaktik zwischen Forschung und Lehre, Bad Heilbrunn (Klinkhardt) 1996

Gericke, H., Mathematik in Antike und Orient, Berlin (Springer) 1984

Karaschewski, H., Wesen und Weg des ganzheitlichen Rechenunterrichts, Teil 1, Stuttgart (Klett) 1969

Lenné, H., Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland, Stuttgart (Klett) 1969

Malle, G., Didaktische Probleme der elementaren Algebra, Braunschweig (Vieweg) 1993

Pietzsch, G., Zur problemhaften Gestaltung des Mathematikunterrichts, Berlin (APW) o.J.

Polya, G., Schule des Denkens, Bern 1949

Polya, G., Mathematik und plausibles Schließen, Bd.I, II, Basel 1962, 1963

Proklus Diadochus: Kommentar zum ersten Buch von Euklids „Elementen“. M. Steck (Hrsg.) Halle: Leopoldina 1945

Schmidt, J.A.: Lehrerhilfen im Mathematikunterricht. Tübingen (Diss.) 1984

Schweiger, F., Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik, JMD 13 (1992), S. 199-214

Vollrath, H.-J., Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht, Stuttgart (Klett) 1984

Vollrath, H.-J.: Lokales Ordnen an geometrischen Konstruktionen. In: H. Postel, A. Kirsch, W.

Blum, Mathematik lehren und lernen. Festschrift für Heinz Griesel. Hannover: Schroedel 1991, 217-228

Vollrath, H.-J., Algebra in der Sekundarstufe, Mannheim (BI) 1994

Wagenschein, M., Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken I, Stuttgart (Klett) 1970

Walsch, W., K. Weber (Hrsg.), Methodik Mathematikunterricht, Berlin (Volk und Wissen) 1975

Winter, H., Entfaltung begrifflichen Denkens, JMD 4 (1983), S. 175-204

Winter, H., Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht, ml 2 (1984), S. 4-16

Wittmann, E., Grundfragen des Mathematikunterrichts, Braunschweig (Vieweg) 1974

Wittmann, E., Zur Rolle von Prinzipien in der Mathematikdidaktik, BMU 1975, S. 226-235

Zech, F., Grundkurs Mathematikdidaktik, Weinheim (Beltz) 1996[8]