70. Didaktische Probleme langfristiger Lernprozesse im Mathematikunterricht

Beiträge zum Mathematikunterricht 1995, 54-61.

1. Einleitung

Grundlegende mathematische Begriffe wie der Zahlbegriff, der Funktionsbegriff, der Begriff der Figur oder der Abbildungsbegriff, wichtige Methoden wie das Entwickeln von Algorithmen, das Problemlösen oder das Beweisen, typische mathematische Denkweisen wie das „logische“ Denken, das funktionale oder das algorithmische Denken und schließlich Einstellungen zur Mathematik sollen in langfristigen Lernprozessen im Mathematikunterricht erworben werden. Eine fundierte Planung des Unterrichts setzt angemessene Modelle dieser Lernprozesse voraus. Am Beispiel des langfristigen Lernens des Zahlbegriffs im Mathematikunterricht sollen einige didaktische Probleme herausgearbeitet werden, die sich bei derartigen Modellbildungsprozessen ergeben.

2. Langfristige Lernprozesse

Ohne Zweifel handelt es sich beim schulischen Lernen des Zahlbegriffs um einen *langfristigen Lernprozeß*, denn selbst bei unbefriedigenden Ergebnissen wird man einen Unterschied zwischen dem Zahlverständnis zu Beginn der Schulzeit in der 1. Jahrgangsstufe und am Ende der Schulzeit in der 13. Jahrgangsstufe feststellen können. In der Psychologie wird man vielleicht vom Aufbau einer kognitiven Struktur sprechen. Lernen wird eher auf kurzfristige Prozesse bezogen. In der Schule ist es allerdings üblich, auch in diesem Fall von Lernen zu sprechen. Deshalb erscheint mir dieser Terminus didaktisch sinnvoll.

Aber läßt sich ein langfristiger Lernprozeß überhaupt sinnvoll eingrenzen? Ist es nicht sinnlos, Lernprozesse über längere Zeiträume festlegen zu wollen, da man ja weiß, daß sich beim Lernen das Entscheidende häufig in einem Augenblick vollzieht? Man denke etwa an das bekannte „Aha-Erlebnis“. Andererseits erscheint es vom schulischen Lernen her möglich und auch notwendig zu sein, beim Lehren von Begriffen unterschiedliche Zeiträume zu betrachten. Wenn ich im Folgenden von langfristigen Lernprozessen spreche, dann meine ich damit Lernen in Zeiträumen von mehreren Jahren.

3. Beziehungen zwischen Lernprozessen unterschiedlicher Dauer

Betrachtet man beim Lehren des Zahlbegriffs den Unterrichtsverlauf etwas näher, so weiß man, daß von der 1. bis zur 5. Jahrgangsstufe die natürlichen Zahlen behandelt werden. In der 6. Jahrgangsstufe lernen die Schüler die Bruchzahlen und in der 7. und 8. Jahrgangsstufe die rationalen Zahlen kennen. In der 9. und 10. Jahrgangsstufe werden die reellen Zahlen behandelt. Im langfristigen Lernen des Zahlbegriffs lassen sich also *mittelfristige* Lernprozesse zum Zahlbegriff feststellen.

Betrachtet man nun die mittelfristigen Lernprozesse näher, so findet man auch bei ihnen Lernen in kürzeren Zeiträumen. Man denke etwa an den Begriff der Primzahl innerhalb des Lernens der natürlichen Zahlen oder den Begriff der Quadratwurzel innerhalb des Lernens der reellen Zahlen. Hier handelt es sich um *kurzfristige* Lernprozesse.

Die Suche nach „Elementen“, die ja in vielen Wissenschaften üblich ist, ist häufig mit der Erwartung verbunden, von den Elementen her das Ganze erklären zu können. Für das Lernen scheint mir dies illusorisch zu sein. Zwar vollziehen sich langfristige Lernprozesse in der Regel in mittel- und kurzfristigen Lernprozessen; andererseits wirken sie auch auf die bei ihnen erworbenen Kenntnisse und Fähigkeiten ein. Man muß also eine *Wechselbeziehung* zwischen untergeordneten und übergeordneten Lernprozessen anneh-

men.

4. Begriffstyp und Dauer des Lernprozesses

Wir haben angenommen, daß der Zahlbegriff langfristig gelernt wird. Das wird sicherlich allgemein Zustimmung finden. Andererseits gibt es grundlegende Begriffe, bei denen das umstritten ist. Ein typisches Beispiel ist der Wahrscheinlichkeitsbegriff. Es spricht vieles dafür, daß er nur langfristig gelernt werden kann. Betrachtet man jedoch die Lehrplanentwicklungen der letzten Jahre, so herrscht die Meinung vor, daß dies auch mittelfristig möglich ist.

Ein mögliches Kriterium für die angemessene Dauer zum Lernen eines Begriffs ist die *Rolle*, die ihm im Rahmen eines Lehrganges zugewiesen wird (VOLLRATH 1984). Begriffe wie Zahl, Funktion, Figur, Abbildung und auch Wahrscheinlichkeit sind Kandidaten für *Leitbegriffe*, die langfristig gelernt werden. Bruchzahl, proportionale Funktion, Dreieck, Viereck und Kreis, Kongruenzabbildung und Ähnlichkeitsabbildung kommen eher als *Schlüsselbegriffe* infrage, die mittelfristig gelernt werden. Dagegen sind Begriffe wie gerade Zahl, Stammbruch, gleichseitiges Dreieck, Achsenspiegelung wohl kurzfristig zu lernende *Standardbegriffe* .

5. Lehren und Lernen

Die Lernprozesse sollen durch Unterricht ausgelöst und gesteuert werden. *Lehren* kann man als das Schaffen von Bedingungen verstehen, unter denen Lernen stattfindet. Wir gehen davon aus, daß dem Lehren rationale Entscheidungen zugrunde liegen und sprechen in diesem Zusammenhang von einer Strategie des Lehrens. Die Planung eines langfristigen Lernprozesses erfordert eine *globale Strategie*. Ihr liegen *Vorstellungen* der Lehrenden über langfristiges Lernen zugrunde. Ob diese Vorstellungen angemessen sind, ist ein Kernproblem für den Unterrichtserfolg.

Derartige Vorstellungen werden im allgemeinen recht vage sein, so daß man Schwierigkeiten hätte, in ihnen bereits *Modelle* langfristiger Lernprozesse zu sehen. Aber hier möchte ich ansetzen. Es geht mir also darum, langfristige Lernprozesse zu modellieren und die Modelle zu diskutieren.

Die Unschärfe der Begriffe, die Komplexität der Prozesse, die sehr unübersichtlichen Abhängigkeiten, die Vielfalt des zu Lernenden und die Individualität der Beteiligten in diesem Prozeß stimmen einen skeptisch, ob ein solches Vorhaben überhaupt Chancen hat, zu wissenschaftlich ernst zu nehmenden Ergebnissen zu kommen. Trotzdem meine ich, daß es lohnend ist, wenigstens den Versuch zu unternehmen. Im folgenden will ich einige Schritte dieses Programms skizzieren und diskutieren.

6. Metaphern für langfristiges Lernens

Vorstellungen lassen sich häufig plastisch in Bildern ausdrücken, in denen das Entscheidende deutlich hervortritt. Eine solche *Metapher* für das Lehren ist z.B. der „Nürnberger Trichter“. Auch für langfristige Lernprozesse im Mathematikunterricht, für die wir uns hier näher interessieren, lassen sich unterschiedliche Metaphern angeben.

(1) Lernen durch Ansammeln

Im Kinderzimmer finden sich viele Sachen, die Kinder irgendwann einmal geschenkt bekommen, gefunden oder gekauft haben. Die Sachen sind den Kindern wertvoll. Sie haben sich angesammelt. Das Kind hat eine Beziehung zu ihnen. Ein System des Sammelns ist nicht zu erkennen.

So kann man sich z.B. auch das Lernen im Mathematikunterricht während der Schulzeit vorstellen. Das Kind lernt im Laufe der Jahre viele Sachverhalte kennen, von denen diejenigen behalten werden, die einen besonderen Eindruck hinterlassen. In manchen Fällen findet sich Wichtiges, das Lehrer erwarten würden, häufig wird Unwichtiges behalten und Wesentliches vergessen. Dieser

Zustand wurde von WAGENSCHEIN (WAGENSCHEIN 1970) beklagt und von ANDELFINGER (z.B. ANDELFINGER 1984) sehr ernüchternd für viele Bereiche der Schulmathematik belegt. Langfristiges Lernen im Mathematikunterricht ist zwar nicht so intendiert, scheint sich aber doch häufig gerade so zu ereignen.

(2) Lernen als Legen eines Puzzles

Beim Legen eines Puzzles kommt es darauf an, daß alle Teile vorhanden sind. Beim Suchprozeß schaut man, ob die Teile zueinander passen, es werden also Beziehungen zwischen den Teilen gesehen. Gleichzeitig versucht man jedoch, auf das Ganze zu schauen, möglichst sich das Bild vorzustellen, um damit bei den einzelnen Teilen zu erkennen, welchen Beitrag sie zum Bild leisten, wo sie also hingehören.

Wer denkt hier nicht an die Schlagworte *Lückenlosigkeit* und *Beziehungshaltigkeit,* die ja beim Lernen im Mathematikunterricht eine wichtige Rolle spielen. Ich erwähne auch die Paradoxie des Verstehens, die sich aus der Komplementarität zwischen den *Einzelheiten* und dem *Ganzen* (VOLLRATH 1993). Diese Metapher betont also beim Lernen den Aufbau von Bereichen des Wissens und Könnens, die miteinander verbunden sind und ein sinnvolles Ganzes ergeben.

(3) Lernen durch Freilegen verborgener Schichten

Das Lernen nach den beiden bisher behandelten Metaphern bleibt "an der Oberfläche". Bereits in dieser Redewendung wird ein Hinweis auf eine andere Metapher des Lernens gegeben. Kinder haben bei der Erkundung ihrer Umwelt das Bedürfnis, den Dingen auf den Grund zu gehen, hinter die Kulissen zu schauen, das Verborgene zu schauen. Wir denken bei diesen metaphorischen Redewendungen an ganz konkrete Handlungen: Ein Loch wird im Beet gegraben, beim Kasperltheater wird ein Blick hinter den Vorhang getan, der Wecker wird zerlegt usw. Auch Forschungsaktivitäten lassen sich anführen: die Tiefenbohrung der Geologen, das Ausgraben der Archäologen, das Sezieren der Anatomen, der Blick des Botanikers durch das Mikroskop und die Beobach-

tung des Astronomen durch das Teleskop.

Beim Lernen denkt man etwa an folgenden Vorgang: Neues wird entdeckt; Beziehungen werden erkannt, mit „bohrenden Fragen“ wird dann den Dingen auf den Grund gegangen.

(4) Lernen als Ersteigen von Stufen

Ich komme nun zur bekannten Metapher des Ersteigens von Stufen. Man denkt hier etwa an das Besteigen eines Turms, das Ersteigen eines Hügels auf einer Treppe oder das Bergsteigen. Die Idee besteht darin, daß man im Blick zurück Beziehungen sieht, die einem vorher verborgen blieben.

VAN HIELE beschreibt den Lernprozeß so, daß durch Reflexion der Gegenstände einer Stufe, eine neue Stufe erklommen wird. Damit betont er die *Analyse* als Weg zu neuer Erkenntnis. Inzwischen liegen für viele Leitbegriffe Stufenmodelle vor, nachdem ich 1974 mit dem Funktionsbegriff begonnen hatte (VOLLRATH 1974). Allerdings ergaben sich für mich vor einiger Zeit bei der Entwicklung eines Modells für das Lernen des Zahlbegriffs Schwierigkeiten, die den Anlaß zu diesen Überlegungen bildeten (VOLLRATH 1994).

(5) Lernen durch Erweiterung des Horizonts

Beim Übergang von einem Zahlbereich zum nächsten ändert sich im Mathematikunterricht nicht notwendig das Niveau der Betrachtungen. Vielmehr werden dabei Grenzen überschritten; neue Zahlen werden kennengelernt, die alten Zahlen und ihre Eigenschaften erscheinen nun als Sonderfälle in neuem Licht. Dieser Vorgang erinnert an einen anderen Weg der Erkundung.

Das Kind erobert sich die Welt, indem es zunächst das Bett, das Kinderzimmer, die Wohnung, das Haus, die Stadt, das Land kennenlernt. Immer sind zunächst Grenzen vorhanden, innerhalb derer es sich bewegt, die es dann aber einmal bewußt überschreitet. Diese Erfahrung bedeutet, daß neue Eindrücke verarbeitet werden und daß Altes in neuer Sicht erscheint.

Auch diese Metapher bringt Vorstellungen über das Lernen zum Ausdruck.

Hier spielt die *Synthese* die entscheidende Rolle: Neues wird erkannt, indem Begrenzungen bewußt überschritten werden, und Altes wird im Licht des Neuen neu gesehen.

7. Von der Metapher zum Modell

STEINER hat darauf hingewiesen, daß Metaphern eine wichtige Vorstufe zu Modellen sein können (STEINER 1988). Das kann man in unserem Zusammenhang sehr deutlich erkennen. Metaphern heben das Entscheidende bildhaft hervor. Man erhält Modelle aus den Metaphern durch Präzisierung des intendierten Endzustandes und der entscheidenden Übergänge. Schließlich ist die Beziehung des langfristigen Lernprozesses zu den mittel- und kurzfristigen Lernprozessen, aus denen er entsteht, zu beschreiben. Das läßt sich bei den angegebenen Metaphern leisten. So kommt man zu folgenden Modellen:

Sammelmodell – Puzzlemodell – Schichtenmodell –

Stufenmodell – Erweiterungsmodell.

Modelle sind von den Lernenden her, von der Sache, von den Zielen und von den Rahmenbedingungen her zu begründen. Ihre Eignung als Grundlage für Unterrichtsstrategien ist dann natürlich vom Prozeß und vom Resultat her zu bewerten.

8. Das Strategieproblem

Modelle des Lernens sollen als Grundlagen für Pläne des Lehrens dienen. Ich will im folgenden skizzieren, wie man für das Gymnasium und für die Hauptschule durch Kombination unterschiedlicher Modelle jeweils zu einer Strategie

für das Lehren des Zahlbegriffs gelangt.

(1) Eine Strategie für das Lernen des Zahlbegriffs im Gymnasium

Wir haben bereits gesehen, daß unter den höheren Formen des Lernens das Stufenmodell und das Erweiterungsmodell jeweils bestimmte, für das Verständnis des Zahlbegriffs wesentliche Aspekte betonen. Ein Plan für das Lehren des Zahlbegriffs wird also Phasen im Wechsel den verschiedenen Modellen zuordnen.

Zu Beginn der *5. Jahrgangsstufe* wird das in der Grundschule erworbene Wissen über natürliche Zahlen reflektiert. Natürliche Zahlen werden nun auf einem höheren Niveau behandelt. Dieser Übergang folgt dem Modell des Lernens in Stufen.

In der *6. Jahrgangsstufe* werden die Bruchzahlen eingeführt. Diese Phase folgt dem Modell des Lernens durch Erweiterung.

Auch die Einführung der negativen Zahlen und damit die Erarbeitung der rationalen Zahlen in der *7. Jahrgangsstufe* folgt dem Modell des Lernens durch Erweiterung.

Zu Beginn der *8. Jahrgangsstufe* wird das Rechnen mit rationalen Zahlen reflektiert. Man erhält eine Basis für Termumformungen. Mit den Termumformungen wird gleichzeitig auf einer formal höheren Stufe mit den rationalen Zahlen umgegangen.

Bei der Entdeckung der irrationalen Zahlen in der *9. Jahrgangsstufe* steht dann wieder Lernen durch Erweiterung im Vordergrund.

Langfristige Lernprozesse setzen sich aus mittelfristigen Lernprozessen zusammen, die wiederum aus kurzfristigen Lernprozessen erwachsen. Die Bruchzahlen z.B. werden in einem mittelfristigen Lernprozeß angeeignet. Die Einsicht, daß man Bruchzahlen als Quotienten natürlicher Zahlen deuten kann, wird dagegen kurzfristig gelernt. Es ist klar, daß das mittelfristige Lernen der Bruchzahlen einen entscheidenden Schritt im Lernen durch Erweiterung dar-

stellt. Die Einsicht über Bruchzahlen als Quotienten natürlicher Zahlen wiederum ist entscheidend für das Lernen durch Erweiterung, weil es zeigt, wie hier eine Grenze überschritten wird. Zugleich erscheinen damit aber auch die bisher vertrauten natürlichen Zahlen in neuem Licht, nämlich z.B. als Bruchzahlen mit dem Nenner 1. In einem Lernen durch Sammeln würden sich diese Brüche lediglich als Skurrilität darstellen, denen man den Namen „Scheinbruch“ gegeben hat.

(2) Ein Modell für das Lernen des Zahlbegriffs in der Hauptschule

Auch die Hauptschule beginnt in der *5. Jahrgangsstufe* mit einer Reflexion des in der Grundschule erworbenen Wissens und Könnens über natürliche Zahlen. Die Bereiche der natürlichen Zahlen, der Längen, der Gewichte, der Zeiten und der Geldwerte kann man als Teile eines Puzzles sehen. Diese Bereiche „passen zueinander“ im Hinblick auf die natürlichen Zahlen als Anzahlen oder als Maßzahlen. Die Geldwerte fallen dabei etwas aus dem Rahmen, weil bei ihnen bereits Dezimalbrüche als Maßzahlen auftreten. Die Zeiten passen nicht so ganz bei den Umrechnungen zwischen den Einheiten wegen der sechziger Teilung.

In der *6. Jahrgangsstufe* werden zunächst die gewöhnlichen Brüche bei den natürlichen Zahlen und die Größen mit gebrochenen Maßzahlen bei den entsprechenden Größen mit natürlichen Zahlen angelagert. Es folgen dann die Dezimalbrüche, die bei den gewöhnlichen Brüchen angebunden werden, und zwar wiederum bei den Bruchzahlen und auch bei den entsprechenden Größenbereichen. Die Geldwerte verlieren dabei ihre Sonderrolle. Der Blick für das „Ganze“ wird durch die Dezimaldarstellung eröffnet. An das „Puzzle“ angehängt ist ein relativ schwach eingebundenes und ausgeprägtes Wissen über periodische Dezimalbrüche. Es verliert sich in der Folge relativ rasch oder bleibt als Merkwürdigkeit haften.

In der *7. Jahrgangsstufe* werden die negativen Zahlen einbezogen. Sie werden jeweils mit den natürlichen Zahlen, den gewöhnlichen Brüchen und den Dezimalbrüchen verbunden.

In den folgenden Jahrgangsstufen wird das „Puzzle“ durch einige Teile erweitert, die jedoch das Bild nicht wesentlich verändern. Es handelt sich in der *8. Jahrgangsstufe* um π und in der *9. Jahrgangsstufe* um die Wurzeln. Auch sie sind als nicht abbrechende Dezimalbrüche durch die Dezimaldarstellung in das Ganze einbezogen. Der Übergang von der Grundschule vollzieht sich also nach einem Stufenmodell, das Lernen in den folgenden Jahrgangsstufen folgt einem Puzzlemodell.

9. Zusammenfassung

Aus dem Bedürfnis, unterschiedliche Prozesse des langfristigen Lernens von Begriffen im Mathematikunterricht beschreiben zu können, wurden verschiedene Modelle entwickelt. Sie dienen als Grundlage für die Unterrichtsplanung, sind aber auch geeignet, die Ergebnisse des Unterrichts zu beurteilen. Dabei zeigt es sich, daß Stufenmodelle zwar wichtig, doch allein nicht ausreichend sind. Ergänzt werden sie durch Sammelmodelle, Puzzlemodelle, Schichtenmodelle und Erweiterungsmodelle.

Literatur

Andelfinger, B., Arithmetische und algebraische Lernerkonzepte in der SI, BzMU 1984, 71-74.

Steiner, H.-G., Über Metaphern, Modelle und Mathematik, In: P. Bender (Hrsg.), Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis, Berlin 1988 , 190-201.

Vollrath, H.-J., Didaktik der Algebra, Stuttgart 1974.

Vollrath, H.-J., Methodik der Begriffslehrens im Mathematikunterricht, Stuttgart 1984.

Vollrath, H.-J., Paradoxien des Verstehens von Mathematik, JMD 14 (1993), 35-58.

Vollrath, H.-J. Algebra in der Sekundarstufe, Mannheim 1994

Wagenschein, M., Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken I, Stuttgart 1970.