56. Betrachtungen zur Entwicklung der Algebra in der Lehre

Mathematische Semesterberichte 38 (1991), 58-98.

1. Lehrbücher und Vorlesungen als Quellen

Die Stationen auf dem Wege neuer mathematischer Erkenntnis von ihrer Entdeckung bis zu ihrer allgemeinen Verbreitung kann man idealisiert wie folgt beschreiben: Der Mathematiker gewinnt am Schreibtisch neue Ergebnisse, teilt sie in einem Vortrag auf einer Tagung interessierten Kollegen mit und schreibt einen Aufsatz für eine Zeitschrift; weil der Zeitraum bis zum Erscheinen meist recht lang ist, versendet er Preprints an die Experten; die neuen Ergebnisse werden in Vorlesungen eingearbeitet; schließlich finden sie ihren Weg in Lehrbücher und werden nun auch von den Nicht-Spezialisten aufgegriffen und finden Eingang in deren Lehrveranstaltungen. Diesen Weg kann man als Beleg für die Fruchtbarkeit der engen Verbindung zwischen Forschung und Lehre sehen. Da die Hochschullehrer prinzipiell in Forschung und Lehre frei sind, ist es ihnen zwar überlassen, wieweit sie neue Erkenntnis aufnehmen und in ihrem Lehrangebot verarbeiten. Doch angesichts ihres Forscherdranges wird man ein rasches Aufnehmen neuer Erkenntnisse in der Lehre erwarten.

Aber in der Realität geht die Entwicklung meist nicht so glatt vor sich wie beschrieben. Zwar ist die Forschung der Motor, doch werden neue Ergebnisse keineswegs sofort in der Lehre wirksam. Entwicklungen werden durch Traditionen gebremst, durch persönliche Wertungen, durch Prüfungsordnungen und Studienpläne, schließlich bis zu einem gewissen Grad auch durch Rücksichtnahme auf Bedürfnisse und Fähigkeiten der Studierenden.

Daß eine solche Diskrepanz besteht, läßt sich vermuten und durch Beobachtungen stützen. Es ist das Anliegen dieser Arbeit, das Verhältnis zwischen Forschung und Lehre für ein Teilgebiet der Mathematik über einen längeren Zeitraum zu betrachten. Hierfür erscheint die Entwicklung der Algebra in der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts besonders geeignet, weil sich in dieser Zeit ein grundlegender Wandel über die Auffassung von Algebra vollzog. In dieser Betrachtung sollen Beziehungen zwischen Arbeiten in Zeitschriften, Vorlesungen und Lehrbüchern der Spezialisten einerseits und Vorlesungen von Nicht-Spezialisten andererseits untersucht werden.

Ausgangspunkt meiner Betrachtungen ist eine Sammlung von Vorlesungsmanuskripten bzw. Vorlesungsmitschriften Würzburger Professoren zur Algebra vom Beginn unseres Jahrhunderts bis zu Beginn der fünfziger Jahre. Es handelt sich um Skripten von GEORG ROST (1903-1935), EMIL HILB (1909-1929), OTTO VOLK (1930-1945) und HERMANN SCHMIDT (1951-1970). Die Jahreszahlen in Klammern geben jeweils den Zeitraum an, in dem diese Professoren eine Professorenstelle in Würzburg innehatten. Alle vertraten regelmäßig die Algebra in der Lehre, keiner war jedoch Algebraiker im Forschungsschwerpunkt. Die meisten Skripten stammen aus dem Nachlaß von OTTO VOLK, die Skripten der Vorlesungen von HERMANN SCHMIDT überließen mir ARTUR BERGMANN und HERBERT GLASER; von HORST HEROLD erhielt ich die Gliederung einer Vorlesung von HERMANN SCHMIDT.

Die Betrachtung dieser Vorlesungen soll einerseits unter dem Gesichtspunkt geschehen, wie die Professoren auf die stürmischen Entwicklungen der Algebra in der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts reagierten; dabei ist es zur Beurteilung der Überzeugungskraft der neuen Ideen sicher vorteilhaft, die Vorlesungen von Nicht-Spezialisten zu studieren. Andererseits sollen unsere Betrachtungen zeigen, welchen Eindruck von Algebra Lehramtskandidaten in dieser Zeit erhielten und damit in die Schule als Hintergrundwissen mitnahmen. Dabei will ich untersuchen, inwieweit sich eine Beziehung zwischen der Entwicklung der Lehrbücher und den vorliegenden Vorlesungen feststellen läßt. Denn die Nicht-Spezialisten dürften sich überwiegend durch Lehrbücher informieren. Als entscheidende Beiträge in der Lehrbuchentwicklung der Algebra sehe ich die Bücher von HEINRICH WEBER (1895/96), Helmut HASSE (1926/27), OSKAR PERRON (1927), OTTO HAUPT (1929) und BARTEL LEENDERT VAN DER WAERDEN (1930) an, die wir im folgenden näher betrachten wollen.

Den Vorlesungen und Lehrbüchern liegen Entscheidungen über die Auswahl der Inhalte, ihre Anordnungen und die Intensität ihrer Behandlung zugrunde. Auch Akzentsetzungen, die Beziehung zu anderen mathematischen Inhalten und das Verhältnis zwischen Theorie und konkreten Problemen werden in der Regel bewußt gestaltet. All dies soll deutlich gemacht werden. Dabei geht es mir darum, möglichst auch die Einstellung zur Algebra und zum Studierenden (als Hörer bzw. Leser) aufzuspüren. Insgesamt hoffe ich, damit unterschiedliche Ansätze deutlich machen zu können, die etwas von der didaktischen Vielfalt auch im Bereich der Hochschule zeigen.

Dabei ergibt sich als Schwierigkeit, daß der Leser sich selbst leicht ein Bild von den angesprochenen Lehrbüchern machen kann, während die Vorlesungen von mir unter relativ groben Gesichtspunkten vorgestellt werden. Außerdem geben auch die Ausarbeitungen nur ein unvollkommenes Bild von den tatsächlichen Vorlesungen und ihrer Wirkung auf die Studierenden. Deshalb möchte ich ausdrücklich hervorheben, daß alle vier Mathematiker nicht nur angesehene Forscher, sondern auch engagierte Lehrer waren. Ihre ehemaligen Schüler bekunden ihren Lehrern durchweg Anerkennung, Hochachtung, ja Liebe. Wenn ich persönlich auch bei keinem von ihnen Vorlesungen gehört habe, so teile ich nach der eingehenden Beschäftigung mit ihrem Leben, ihren Gedanken und ihrem Werk die Einschätzung ihrer Schüler. Mein besonderer Dank gilt dabei meinem verstorbenen Freund OTTO VOLK, dem ich die Quellen, aber letztlich auch die Anregungen zu dieser Arbeit verdanke.

2. Heinrich Webers „Lehrbuch der Algebra“

Als 1895 das ,,Lehrbuch der Algebra“ von HEINRICH WEBER erschien, hieß es in der Besprechung in den „Fortschritten der Mathematik“:

> „In dem Vaterlande von Gauss, dem die Theorie der Gleichungen ihre feste Grundlage und die fruchtbarsten Gedanken verdankt, gab es kein originales

> Handbuch der Algebra. Das an sich vortreffliche ‚Traité d'Algèbre supérieure' von Serret, der im Jahre 1885 gestorben ist und in den letzten 13 Jahren seines Lebens zu leidend war, um einschneidende Aenderungen vornehmen zu können, diente in der deutschen Uebersetzung noch immer als das beste Compendium der Algebra. Nun hat sich inzwischen die Theorie der Invarianten, der Gruppen, der algebraischen Functionen so mächtig entfaltet, dass ihr Einfluss die Lehre von den Gleichungen notwendig umgestalten musste. Daher wird ein Werk, das, wie das vorliegende, diesen Einfluss darstellt, nicht nur für den Studierenden, sondern auch für den Forscher sich als äusserst nützlich erweisen: es kennzeichnet den gegenwärtigen Stand der mathematischen Forschung auf dem Gebiete der Algebra. Der Ursprung des Buches aus wirklich gehaltenen Vorlesungen ermöglicht einem weiten Leserkreise das Eindringen in seinen Inhalt, bedingt aber auch das Innehalten gewisser Grenzen, die mancher vielleicht lieber überspringen möchte. Ohne besondere Kenntnisse vorauszusetzen, führt der Verf. den Leser mit kundiger Hand in das weite Gebiet der modernen Algebra ein.“ (LAMPE 1895, S.102-103)

Das Buch wird zu einem Standardwerk. 1896 erscheint der zweite Band. Bereits kurze Zeit später erfährt das Werk eine Neuauflage, die dann drei Bände umfaßt. 1912 kommt eine „Kleine Ausgabe in einem Bande“ heraus. Es gibt auch eine Übersetzung ins Französische. Bis in unsere Zeit verweisen die Lehrbücher der Algebra auf diesen Klassiker.

> „Zwei Dinge sind es, die für die neueste Entwickelung der Algebra ganz besonders von Bedeutung geworden sind; das ist auf der einen Seite die immer mehr zur Herrschaft gelangende Gruppentheorie, deren ordnender und klärender Einfluss überall zu spüren ist, und sodann das Eingreifen der Zahlentheorie. Wenn auch die Algebra zum Theil über die Zahlentheorie hinausgeht, und in andere Gebiete, z.B. die Functionentheorie, oder in ihren Anwendungen auch in die Geometrie hinüber greift, so ist doch die Zahlenlehre immer das vorzüglichste Beispiel für alle algebraischen Betrachtungen, und die Fragen der Zahlentheorie, die heute im Vordergrund des

Interesses stehen, sind vorwiegend algebraischer Natur.“ (WEBER 1895, S.V-VI)

Der erste Band ist in drei Teile, WEBER spricht von „Büchern“, gegliedert. Das erste Buch, „Die Grundlagen“, stellt die Eigenschaften von rationalen Funktionen und Determinanten dar. Dann folgen Ausführungen über die Wurzeln von ganzen rationalen Funktionen. Hier wird der Fundamentalsatz der Algebra behandelt. Reine Gleichungen werden mit Hilfe trigonometrischer Funktionen gelöst. Auch Lösungsverfahren für die kubischen und biquadratischen Gleichungen werden angegeben. Die Beziehungen zwischen den Wurzeln und den Koeffizienten ganzer rationaler Funktionen werden in einem sehr ausführlichen Kapitel über symmetrische Funktionen abgehandelt. Zentrale Sätze sind der Hauptsatz über symmetrische Funktionen und der Satz von Bezout. Das erste Buch schließt mit zwei Abschnitten über Transformationen. Hier werden u.a. die Tschirnhaus-Transformation und Gleichungen fünften Grades behandelt.

Das zweite Buch, „Die Wurzeln“, befaßt sich einmal mit den Fragen, wann Wurzeln von Gleichungen reell sind und wo die Wurzeln liegen. Dabei geht es vor allem um die Sätze von Sturm und Budan-Fourier. Zum anderen geht es um Näherungsverfahren zur Bestimmung von Wurzeln. Hier finden sich die Methoden von Newton, Daniel Bernoulli, Gräffe und Lagrange.

Das dritte Buch, „Algebraische Größen“, bringt die Galoistheorie und ihre Anwendungen auf zyklische Gleichungen, die Kreisteilungsgleichung und metazyklische Gleichungen.

Die Darstellung ist sehr breit. Definitionen und Sätze sind meist gesperrt gedruckt und numeriert. Beweise bestehen häufig aus langwierigen Umformungen. Es fehlen dagegen Beispiele, Zielangaben und zusammenfassende oder weiterführende Erläuterungen. Auch auf historische Hinweise und Wertungen wird verzichtet. Für den Leser, der möglichst schnell zur Galoistheorie vorstoßen möchte, ist nicht erkennbar, auf welche Teile er vorher verzichten kann.

Von den Strukturbegriffen finden sich die Begriffe des Körpers und der Gruppe. Beide Begriffe bleiben im ersten Band stark modellbezogen: Gruppen sind Permutationsgruppen, und Körper sind Zahlkörper. Erst im zweiten Band wird der allgemeine Gruppenbegriff gewonnen und wird eine Gruppentheorie entwickelt.

Die Kurzfassung von 1912 wirkt gestraffter und im Hinblick auf die Strukturbegriffe auch „moderner". Die strukturelle Sicht kommt deutlich im Vorspann zum Abschnitt über Gruppen zum Ausdruck:

> „Es sind hauptsächlich zwei große allgemeine Begriffe, von denen die moderne Algebra beherrscht wird. Die Existenz und Bedeutung dieser Begriffe konnte allerdings erst erkannt werden, nachdem die Algebra bis zu einem gewissen Grad fertig und zum Eigentum der Mathematiker geworden war. Erst dann konnte in ihnen das verbindende und führende Prinzip erkannt werden. Es sind das die Begriffe der Gruppen und des Körpers, zu deren Erklärung wir jetzt fortschreiten. Der allgemeinere Begriff ist der der Gruppe, mit dem wir also beginnen." (WEBER 1912, S.180)

Dies Zitat zeigt zugleich das Bemühen um Motivationen und um Aufhellung von Hintergründen und Zusammenhängen. Dies gilt allgemein für die Kurzausgabe. Hier finden sich auch historische Hinweise und Wertungen. All dies stellt gegenüber der großen Ausgabe einen deutlichen didaktischen Fortschritt dar.

HEINRICH WEBER (1842-1913) war o. Professor in Straßburg, als sein Lehrbuch erschien (VOSS 1914). Er war eng befreundet mit MORITZ CANTOR, RICHARD DEDEKIND, FELIX KLEIN und CARL NEUMANN. Im Vorwort seines Lehrbuchs weist er auf die große Bedeutung DEDEKINDS für die Entwicklung seiner algebraischen Arbeiten hin; den Einfluß von Klein spürt man besonders in der Gruppentheorie des zweiten Bandes bei den Symmetriegruppen. Zusammen mit DEDEKIND hatte er 1882 die grundlegende Abhandlung über die algebraischen Funktionen einer Veränderlichen verfaßt. Es folgten weitere algebraische Arbeiten bis hin zu der 1893 erschienenen Arbeit „Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie", auf die sich später ERNST STEINITZ in seiner berühmten Arbeit, „Algebraische Theorie der Körper“ (1910), ausdrücklich bezieht.

In dieser Arbeit führt WEBER den Körper- und den Gruppenbegriff allgemein ein. Er schreibt zu Beginn:

> „Im Folgenden ist der Versuch gemacht, die Galois'sche Theorie der algebraischen Gleichungen in einer Weise zu begründen, die soweit möglich alle Fälle umfasst, in denen diese Theorie angewandt worden ist. Sie ergiebt sich hier als eine unmittelbare Consequenz des zum Körperbegriff erweiterten Gruppenbegriffs, als ein formales Gesetz ganz ohne Rücksicht auf die Zahlenbedeutung der verwendeten Elemente . . . Die Theorie erscheint bei dieser Auffassung freilich als ein reiner Formalismus, der durch Belegung der einzelnen Elemente mit Zahlwerthen erst Inhalt und Leben gewinnt. Dagegen ist diese Form auf alle denkbaren Fälle, in denen die gemachten Voraussetzungen zutreffen, anwendbar, die einerseits in die Functionentheorie andererseits in die Zahlentheorie hinübergreifen.“ (WEBER 1893, S. 521)

Nach der allgemeinen Definition des Gruppenbegriffs bringt er mehrere, auch geometrische Beispiele. Der Körperbegriff wird ebenfalls allgemein definiert; es werden verschiedene Beispiele von Körpern genannt, dabei wird auch auf endliche Körper hingewiesen. Seine Ausführungen übernimmt er zum Teil wörtlich in sein Lehrbuch. WUSSING (1969) hebt hervor, daß Weber damit den Schritt von den „konkreten“ zu den „abstrakten“ Gruppen vollzogen habe. Er betont auch die große Bedeutung der Arbeiten und des Buches von Weber für eine Vereinheitlichung der Terminologie. So schreibt er Weber z.B. die Bezeichnung „Normalteiler“ zu. („Teiler“ einer Gruppe ist bei Weber eine Untergruppe.)

Der erste Band des „Lehrbuch der Algebra“ stellt die klassische Algebra sehr breit dar Es geht wahrscheinlich bereits über das hinaus, was in den Vorlesungen, die sich daran anlehnen, gebracht wird. Es ist aber bezeichnend, daß trotzdem ein Kritiker immer noch etwas vermißt:

> „Doch will Ber. nicht unbemerkt lassen, dass ihm aus England die Anfrage zugegangen ist, warum die dort sehr beliebte Methode von Homer ... gar nicht erwähnt worden sei.“ (LAMPE 1895, S.103)

Der zweite Band stellt die seinerzeit modernen Ergebnisse der Forschung sehr breit dar. Während der dritte Band einen Gegenstand in die Algebra einbezieht, der vor allem durch das besondere Interesse des Autors an dieser Frage zeigt. (Er stellt eine Überarbeitung seines Buches über elliptische Funktionen aus dem Jahre 1891 dar.)

Die Kurzfassung dürfte dagegen eher den Kernbereich der Algebra zeigen Sie ist im wesentlichen ein Auszug aus dem ersten Band und enthält aus dem zweiten Band lediglich die Abschnitte über Gruppen (allgemein) und über „algebraische Körper“. Aus dem dritten Band wird nichts übernommen.

Das „Lehrbuch der Algebra“ hat für drei Jahrzehnte weitgehend die Vorstellungen der Mathematiker über Algebra geprägt Über diese Auffassung von Algebra schreibt HASSE:

> „Für diese steht es a priori außer jeder Diskussion, daß die Algebra, wie überhaupt jede rechnende mathematische Disziplin, im Körper der reellen oder wo nötig in dem der komplexen Zahlen betrieben wird; denn diesen Zahlkörpern kommt eine durch ihre anschauliche Beziehung zum Kontinuum und durch ihre grundlegende Bedeutung für die Anwendungen der rechnenden Mathematik auf Geometrie und Erfahrung gesichertes unantastbares Primat zu vor allen denkbaren Körpern. Dieser Grundeinstellung entsprechend wird als letztes Ziel der Algebra die handgreifliche, sei es formelmäßige, sei es numerische Bestimmung der Gleichungslösungen angesehen, und dieser Zweck heiligt die Mittel: Neben den der Aufgabe adäquaten elementaren Rechenoperationen werden auch ihr wesensfremde, dem reellen oder komplexen Kontinuum eigentümliche Hilfsmittel und Schlußweisen in Betracht gezogen.“ (HASSE 1928, S. 121)

Als HASSE dies 1928 schreibt, wird Webers Auffassung von Algebra von jüngeren Algebraikern als unmodern empfunden. Zu Beginn unseres Jahrhunderts galt sie als richtungweisend.

Betrachten wir nun eine Algebra-Vorlesung eines Würzburger Mathematikers aus dieser Zeit im Hinblick auf WEBERS Auffassung von Algebra.

3. Georg Rosts Algebra-Vorlesung

GEORG ROST (1870-1958) wurde 1903 zum a. o. Professor und 1906 zum o. Professor für Mathematik und Astronomie in Würzburg ernannt (HAUPT 1959). Er war ein Schüler und enger Mitarbeiter von FRIEDRICH PRYM, einem Funktionentheoretiker in Würzburg, der viel zur Verbreitung der Ideen seines Lehrers BERNHARD RIEMANN beigetragen hat. Auch ROST war Funktionentheoretiker. Beide arbeiteten intensiv an der „Theorie der Prym'schen Funktionen erster Ordnung im Anschluß an die Schöpfungen Riemanns“, die 1911 erschien. ROST hatte auch starke astronomische Interessen. So erwarb er sich besondere Verdienste um den Aufbau einer neuen Sternwarte der Universität (VOLK 1982). OTTO HAUPT rühmt in seinen Erinnerungen ROSTS Vorlesungen über Astronomie und Astrophysik „mit den zugehörigen unvergeßlichen Übungen in der alten, auf dem Neubauturm untergebrachten Juliussternwarte“ (HAUPT 1988). Generell berichtete er, daß man am Ende der Vorlesung bei ROST ein fertiges Manuskript in Händen hatte, denn die Vorlesung war gut vorbereitet und wurde klar in mäßigem Tempo vorgetragen.

Mir liegt eine Ausarbeitung von JOS. SCHMITT vom Wintersemester 1904/05 der Algebra-Vorlesung von ROST vor. Die Vorlesung ist sehr klar gegliedert. Sie beginnt mit einer Einführung in komplexe Zahlen und Funktionen unter dem Titel „Das Operationsgebiet der Algebra“. Es folgen dann drei große Abschnitte: „Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Gleichungen“, „Algebraische Auflösung der Gleichungen“ und „Numerische Auflösung der algebraischen Gleichungen“. Der letzte Abschnitt ist in zwei Teile gegliedert: „Trennung der reellen Wurzeln“ und „Angenäherte Berechnung der reellen

Wurzeln“. Seine Algebra ist also eine Lehre von den algebraischen Gleichungen.

Gleich zu Beginn gibt ROST die Gliederung bekannt, so daß sich die verschiedenen Aspekte des Themas wie ein roter Faden durch die Vorlesungen ziehen. Im ersten Teil werden einige Sätze über ganze rationale Funktionen behandelt. Bereits der zweite Paragraph bringt den Fundamentalsatz der Algebra mit dem Beweis von Argand. Es folgt eine knappe Darstellung der Theorie der symmetrischen Funktionen, wobei die Waringschen und dann die Newtonschen Formeln ausführlich entwickelt und angewendet werden.

Mit einem kurzen Hinweis auf die Tschirnhaus-Transformation wird dann der nächste Abschnitt vorbereitet. Hier werden die Gleichungen zweiten, dritten, vierten und fünften Grades ausführlich behandelt. Auf den Satz von Abel und die Galoistheorie wird verwiesen, ohne näher darauf einzugehen. Zum Schluß werden die reziproken Gleichungen und die Kreisteilungsgleichung bearbeitet.

Nach der algebraischen Auflösung der Gleichungen geht es dann um ihre numerische Behandlung. Nach Sätzen über die Grenzen für die reellen Nullstellen folgen die Sätze von Descartes, Budan-Fourier und Sturm. Von den Näherungsverfahren werden die regula falsi und die Methoden von Newton, Fourier, Lagrange (Kettenbrüche) und Gräffe behandelt. Es folgt ein Anhang über Anwendungen der Determinantentheorie auf die Berechnung der Resultanten und Diskriminanten.

Als „Lehrbücher“ nennt er zu Beginn: WEBER-WELLSTEIN, PETERSEN, SERRET, WEBER und NETTO.

Die Inhalte der Vorlesung finden sich weitgehend im ersten Band von Webers Lehrbuch, gegenüber diesem sind sie allerdings stark reduziert. Insbesondere fehlt die Galoistheorie. Durchweg werden alle Themen wesentlich straffer behandelt (eher im Stile des „WEBER-WELLSTEIN“ und des „PETERSEN“). Typisch ist z.B. die Behandlung der symmetrischen Funktionen. ROST gewinnt durch Koeffizientenvergleich die elementarsymmetrischen Funktionen als

Funktionen der Wurzeln einer ganzen rationalen Funktion. Der Fundamentalsatz wird ohne Beweis mitgeteilt, statt dessen werden die Formeln von Waring und Newton hergeleitet. Es folgt der Satz von Cayley über die Beziehung zwischen Grad und Gewicht der elementarsymmetrischen Funktionen mit Beweis. Schließlich werden noch einige Folgerungen über die gebrochenen rationalen Funktionen der Wurzeln einer ganzen rationalen Funktion gezogen. Von den Strukturbegriffen findet sich noch nichts in dieser Vorlesung.

Im Vordergrund des Interesses stehen bei ROST Verfahren. Sätze werden meist als Grundlagen von Verfahren zur Lösung von Problemstellungen über Gleichungen angeführt. Längere Beweise werden vermieden. Die Verfahren werden häufig zunächst allgemein behandelt, dann durch Beispiele erläutert. Knappe historische Hinweise finden sich meist zu Beginn eines Paragraphen. Der Vorlesungsausarbeitung ist natürlich nicht zu entnehmen, ob ROST in der Vorlesung selbst ausführlichere Kommentare gegeben hat.

Mit der Konzeption von WEBER hat die Vorlesung von ROST gemeinsam, daß die reellen bzw. die komplexen Zahlen die Grundlage der Algebra sind und daß es in der Algebra um die Wurzeln der ganzen rationalen Funktionen geht. Auch die Reihenfolge der Inhalte entspricht weitgehend dem Buch von WEBER. Während aber bei WEBER immerhin eine Theorie in Ansätzen erkennbar ist, entsteht nach der Vorlesung von ROST eher der Eindruck einer Lehre über die Methoden zum Lösen von Gleichungen. ROST beschränkt sich dabei auf die zu seiner Zeit klassischen Fragen und Methoden und bringt nur solche Sachverhalte, die relativ einfach zugänglich sind.

Daß sich Algebra zu dieser Zeit in einer stürmischen Entwicklung befand, kann der Studierende in dieser Vorlesung nicht erkennen. Für den angehenden Lehrer war jedoch der überwiegende Teil der Vorlesung als Hintergrundwissen für den späteren Unterricht am Gymnasium relevant. Auch für das Staatsexamen ist die Vorlesung eine gute Vorbereitung, denn bei den in Bayern zentral gestellten Prüfungsaufgaben für das Staatsexamen wurden konkrete Aufgaben über Wurzeln ganzer rationaler Funktionen gestellt. Bis zu einem gewissen Grad wird das natürlich auch auf die Gestaltung der Vorlesung zurückgewirkt haben.

In den großen Linien entspricht also die Vorlesung von ROST weitgehend dem ersten Band des Lehrbuchs von WEBER. Da er allerdings nicht bis zur Galoistheorie vorstößt, besteht letztlich auch kein Bedarf, die Begriffe Gruppe und Körper einzuführen. Während das Buch von WEBER an die algebraische Forschung heranführen will, orientiert sich die Vorlesung von ROST stärker an den Fähigkeiten und Bedürfnissen seiner Studenten, die das höhere Lehramt anstreben.

Algebra-Vorlesungen wurden in Würzburg bis in die zwanziger Jahre von Emil HILB, GEORG ROST und Eduard von WEBER (VOLK 1982) etwa alle drei Jahre meist einsemestrig (4stündig) angeboten. Aus dieser Zeit liegt mir auch eine Vorlesungskonzeption von HILB vor.

4. Emil Hilbs klassische Algebra-Vorlesung

EMIL HILB (1882-1929) war 1909 nach Würzburg zum a. o. Professor berufen worden (HAUPT 1933). Er war ein Schüler LINDEMANNS und hatte 1903 mit einer funktionentheoretischen Arbeit an der Universität München promoviert. Nach kurzem Schuldienst wurde er Assistent in Erlangen und habilitierte sich dort. Er arbeitete über Oszillationstheoreme und Entwicklungssätze. Dabei benutzte er HILBERTS Theorie der Integralgleichungen. Mit FELIX KLEIN und DAVID HILBERT bestand ein reger Briefwechsel. HILB war Mitherausgeber und Verfasser bei der Enzyklopädie der Mathematik. OTTO HAUPT rühmt die klaren, anregenden Vorlesungen, in denen HILB eine Fülle interessanter Hinweise und Querverbindungen gab. Nach den Vorlesungen hatte er auf dem Heimweg stets einen Schwarm von Studenten bei sich, die er für seine Ideen zu begeistern suchte. So wird insbesondere seine Förderung des wissenschaftlichen Nachwuchses hervorgehoben. 1923 wurde er zum o. Professor für Mathematik in Würzburg ernannt. Sein früher Tod im Jahre 1929 war ein schwerer Schlag für die Mathematik in Würzburg.

HILB hat immer wieder Algebra-Vorlesungen in Würzburg gehalten, meist einsemestrig (4stündig). Das vorliegende Manuskript scheint Grundlage der Vorlesungen bis zum Sommersemester 1927 gewesen zu sein. Es finden sich zahlreiche Korrekturen, Einschübe, einliegende Blätter und Aufgabenblätter. Diese Vorlesung steht ganz in der Algebra-Tradition, wie wir sie bereits bei der Vorlesung von ROST beschrieben haben. Er behandelt komplexe Zahlen, ganze rationale Funktionen, Teilbarkeit von ganzen rationalen Funktionen, Näherungsverfahren zum Lösen von Gleichungen, die Sätze von Sturm, Budan-Fourier und Descartes über die Lage von Wurzeln. Es folgt dann ein Abschnitt über symmetrische Funktionen einschließlich des Waring-Verfahrens. Dann werden die Tschirnhaus-Transformation und anschließend die kubische und biquadratische Gleichung gründlich abgehandelt. Der Satz von Abel wird mitgeteilt. Ausführlich wird das Problem der Kreisteilung bearbeitet. Reziproke und zyklische Gleichungen schließen die Vorlesung ab.

Inhaltlich geht also die Vorlesung von HILB über die von ROST hinaus. Allerdings werden die letzten Themen sehr knapp angesprochen. Im Vordergrund dieser Vorlesung stehen ebenfalls Verfahren. Neue Problemstellungen und Methoden werden in der Regel an mehreren Beispielen konkret vorgestellt. Meist haben diese Beispiele den Charakter einer Hinführung zu Sätzen.

Diese werden stichwortartig formuliert, und es werden kurze Hinweise auf die Namen und Daten ihrer Entdecker gegeben. Beweise werden meist nur dann angeführt, wenn es sich um kürzere Überlegungen handelt. Nun kann es natürlich sein, daß er sich die Beweise nicht notierte, sondern frei vortrug. Andererseits dominieren so stark die ausführlich dargestellten Verfahren, daß er sich wohl häufig darauf beschränkte, in der Vorlesung die Beweisidee mitzuteilen. Auch dazu finden sich gelegentlich knappe Hinweise. Strukturbegriffe werden in dem ursprünglichen Manuskript nicht eingeführt. Selbst die kurzen Überlegungen zur Galoistheorie beschränken sich auf einige Aussagen über Permutationen. Allerdings sind am Ende einige Blätter mit Notizen über Integritätsbereiche, Körper und Gruppen eingelegt, die er möglicherweise bei einer der letzten Vorlesungen vorschaltete, denn sie beginnen mit „§1 Gleichheit".

Gehen wir davon aus, daß HILB diese Vorlesung zweisemestrig im Wintersemester 1926/27 und im folgenden Sommersemester gelesen hat, so versucht er damit bis zu einem gewissen Grade, den grundsätzlichen Wandel in der Auffassung über Algebra, der sich gegen Ende der zwanziger Jahre unter den Algebraikern vollzog, zu berücksichtigen. Diesen Wandel beschreibt HASSE in einer Besprechung des Lehrbuchs von PERRON (1927) ausführlich. Wir hatten bereits oben bei dem Lehrbuch von WEBER HASSES Beschreibung der „älteren Auffassung" skizziert. Bei der „modernen Auffassung" ist für HASSE charakteristisch:

> „Diese kann den reellen oder komplexen Zahlen aus einem nicht durch Liebe zu Anschaulichkeit oder Anwendbarkeit getrübten Gerechtigkeitsgefühl gegenüber allem Denkbaren kein apriorisches Primat zuerkennen. Wenn sie demgemäß alle denkbaren Körper in Betracht zieht, so darf ihr daraus keineswegs der Vorwurf einer vagen Allgemeinheit gemacht werden. Denn erst in zweiter Linie ist diese größtmögliche Allgemeinheit dem Inhalte nach Motiv für die Einführung des abstrakten Körperbegriffs, in erster Linie vielmehr die weitgehendste Beschränkung der Methode nach: Die Entwicklung der Algebra in abstrakten Körpern soll von vornherein jede Möglichkeit ausschließen, sich anderer Schlußweisen und Hilfsmittel zu bedienen als der Aufgabe adäquater, also solcher, die sich nur auf die elementaren Rechenoperationen berufen." (HASSE 1928, S.121)

In diesem Sinne wurde natürlich HILBS Vorlesung durch Vorschaltung einiger Strukturbetrachtungen zu den reellen und komplexen Zahlen keine „moderne" Algebra-Vorlesung. Dabei sollte man jedoch bedenken, daß zu seiner Zeit viele Mathematiker den neuen Entwicklungen reserviert gegenüberstanden. So spiegelt z.B. das Lehrbuch von OSKAR PERRON aus dem Jahre 1927 sehr deutlich dieses Spannungsverhältnis zwischen den Auffassungen wider.

5. Oskar Perrons „Algebra“

Oskar PERRON (1880-1975) arbeitete überwiegend auf den Gebieten der Analysis, der Zahlentheorie und der Algebra (SCHMIDT 1976). Er war ein Schüler von LINDEMANN und PRINGSHEIM. Seit 1922 war er ordentlicher Professor an der Universität München. Sein Schüler HERMANN SCHMIDT schreibt (1976) über PERRONS „Algebra“:

> „Das Hauptgewicht liegt hier nicht, wie bei den meisten neueren Darstellungen, in der größtmöglichen Allgemeinheit der Grundbegriffe, sondern in der didaktisch äußerst geschickten Gesamtanlage und dem Reichtum an faßlichen, unmittelbar anwendbaren Sätzen und konstruktiven Methoden.“ (SCHMIDT 1976, 225-226).

Für HASSE ist PERRONS „Algebra“ „ein willkommener Ersatz des inhaltlich in vielem unmodern gewordenen WEBERschen Standardwerkes, über das es sich zudem didaktisch weit erhebt.“ (HASSE 1928, 5.123)

Zwar finden sich bei PERRON im ersten Kapitel über „Grundbegriffe“ bereits die Strukturbegriffe Ring und Körper. Doch inhaltlich folgt sein Lehrbuch weitgehend dem Aufbau des Buches von WEBER. Es seien nur die wichtigsten Themen in der behandelten Reihenfolge genannt:

> Grundbegriffe – Polynomischer und Taylorscher Satz – Determinanten – Symmetrische Funktionen – Teilbarkeit – Existenz der Wurzeln – Numerische Auflösung von Gleichungen – Gleichungen bis zum vierten Grad und reziproke Gleichungen – Substitutionsgruppen – Die Galoissche Gleichungstheorie – Die Gleichungen fünften Grades.

Auch bei ihm finden sich die klassischen Sätze im wesentlichen mit gleicher Akzentsetzung. Allerdings schränkt er beim Fundamentalsatz der Algebra etwas ein:

> „Der Fundamentalsatz der Algebra führt seinen Namen heute nicht mehr mit vollem Recht. Gewiß ist er ein ganz fundamentaler Satz – aber nicht

> der Algebra, sondern der Funktionentheorie. Für die Algebra selbst ist er eigentlich entbehrlich; ... Trotzdem dürfen wir aber den Fundamentalsatz hier nicht übergehen, nicht nur aus historischen Gründen, sondern vor allem deshalb, weil durch ihn ein großes Teilgebiet der Algebra, nämlich die Algebra des Körpers der komplexen Zahlen, der doch der wichtigste von allen Körpern ist, eine wundervolle Abrundung und Selbständigkeit gewinnt.“ (PERRON, 1,1927, S.258)

Trotz dieser Einschränkung steht aber das Buch von PERRON meines Erachtens voll in der Tradition der klassischen Algebra. Wie wir oben gesehen hatten, ist nach HASSE für die ältere Auffassung von Algebra das Primat des Körpers der reellen bzw. des Körpers der komplexen Zahlen sowie die formelmäßige bzw. numerische Bestimmung der Wurzeln als Ziel der Algebra kennzeichnend. Die für HASSE moderne Auffassung zieht dagegen „alle denkbaren Körper“ in Betracht. Ist nun das Buch von PERRON eine „moderne“ Algebra? HASSE schreibt:

> „Ein Blick in das Vorwort des vorliegenden Werkes genügt, um zu erkennen, daß sein Verfasser ganz auf dem Boden der modernen Auffassung steht, und die Lektüre läßt dies dann auch von Seite zu Seite klarer und schöner hervortreten.“ (HASSE 1928, S.122)

Diese Einschätzung irritiert, denn PERRON läßt als Körper nur Körper aus komplexen Zahlen und Körper rationaler Funktionen zu. Allerdings beschränkt sich PERRON dabei weitgehend auf die allgemeinen Eigenschaften von Körpern, ohne auf die besonderen Eigenschaften der betrachteten Körper zurückzugreifen.

Bei PERRONS Galoistheorie macht HASSE Einschränkungen, wenn er schreibt, daß ihre Gestaltung bei PERRON „den nachwirkenden Einfluß der älteren Auffassung nicht ganz verleugnen kann“ (HASSE 1928, S.123).

PERRON selbst äußert sich über den Gegenstand seines Buches: „die traditionelle Algebra, d.i. diejenige mathematische Disziplin, die man seit jeher mit diesem Namen belegt hat und deren Endziel die Theorie der algebraischen Gleichungen ist.“ (PERRON 1927,1; S.V)

Allerdings zeigt er ein deutlicheres Methodenbewußtsein als WEBER, wenn er schreibt:

> „Wenn ich diese Algebra auf der ersten Textseite als die Theorie der rationalen Funktionen bezeichnet habe, so könnte es scheinen, als ob sie ein kleines Teilgebiet der Funktionentheorie wäre. Aber nichts wäre falscher als diese Vorstellung; was die Algebra von der Funktionentheorie unterscheidet, ist die Methode, und durch ihre andere Methode gewinnt sie auch einen völlig anderen Inhalt. In der Algebra gibt es nur die vier Grundrechnungsarten: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division; es gibt aber kein Größer und Kleiner und keinen Limesbegriff. Daher war es mein Bestreben, diese Eigenart der Algebra viel deutlicher hervortreten zu lassen, als es bisher in den größeren Werken üblich war.“ (PERRON 1927, 1, S.V)

Es sind vielleicht dieses Methodenbewußtsein und die von PERRON aufgestellte und in dem Buch auch eingelöste Forderung nach größerer Strenge, die HASSE dazu veranlaßt haben, das Buch der „modernen“ Richtung zuzurechnen.

Inwiefern sich das Buch von PERRON über das Buch von WEBER „didaktisch weit erhebt“, ist schwer nachzuvollziehen. Vergleicht man den ersten Band der Algebra von WEBER mit den beiden Bänden der Algebra von PERRON, dann entsprechen sie sich weitgehend in Auswahl und Anordnung der Inhalte. Bei PERRON sind die Sätze etwas deutlicher hervorgehoben und meist straffer formuliert. Bei ihm finden sich auch häufiger hinführende, motivierende Beispiele als bei WEBER. Beweise ergeben sich immer wieder als „Hinführungen“ zu den Sätzen. Kommentierende Ausführungen erleichtern dem Leser bei PERRON eher die Einschätzung des Gelesenen. Bei WEBER stellt man eine Liebe zu ausufernden Rechnungen fest, während bei PERRON häufiger Überlegungen entwickelt werden, die langwierige Umformungen vermeiden und entscheidende Gedanken deutlicher hervortreten lassen. Vergleicht man das

Buch von PERRON didaktisch gar mit der Kurzausgabe von WEBER (1928 erschien ein dritter unveränderter Nachdruck), fällt es noch schwerer, HASSES Wertung nachzuvollziehen.

Wahrscheinlich wollte HASSE verbinden, statt Gräben aufreißen. Und so will er mit seiner wohlwollenden Besprechung PERRON mit einbeziehen. In einem Vortrag auf der Jahresversammlung der DMV 1929 in Prag über: „Die moderne algebraische Methode“ versucht er, für die moderne Algebra zu werben.

> „Als Endziel einer solchen Werbung sehe ich es nicht an, irgend jemanden von seinem bisherigen Interessengebiet abzuziehen und der Algebra zuzuführen. Vielmehr betrachte ich es als meine Aufgabe, wohlwollendes Verständnis für die moderne Algebra zu erzielen, und ihren Methoden, soweit sie von allgemeiner Bedeutung sind, dazu zu verhelfen, sich durchzusetzen und Allgemeingut der heutigen Mathematiker-Generation zu werden.“ (HASSE 1930, S.22)

Er selbst hatte 1926 eine „Höhere Algebra“ in der Sammlung Göschen herausgebracht, die radikal mit der Tradition bricht. Indirekt ist sein Vortrag deshalb wohl auch als Versuch einer Rechtfertigung zu sehen.

6. Helmut Hasses „Höhere Algebra“

Als HELMUT HASSE (1898-1979) sein Lehrbuch schrieb, war er gerade im Alter von 27 Jahren ordentlicher Professor in Halle geworden. Er hatte mit Erfolg zahlentheoretische Probleme durch strukturelle Betrachtungen gelöst und damit die Fruchtbarkeit dieses neuen Ansatzes für ein klassisches Gebiet gezeigt. In der Einleitung zu seinem Buch schreibt er über die Aufgabe der Algebra:

> „Es sollen allgemeine, formale Methoden entwickelt werden, nach denen man mittels der vier elementaren Rechenoperationen gebildete Gleichungen zwischen bekannten und unbekannten Elementen eines Körpers nach den unbekannten auflösen kann.“ (HASSE 1926, S.6-7)

Im Vordergrund des Interesses stehen dabei nicht die Elemente des Körpers, sondern die Eigenschaften der Rechenoperationen. HASSE beginnt mit Ringen, Körpern und Integritätsbereichen. Er hebt als „das formal-charakteristische, von der inhaltlichen Bedeutung der Zeichen als Zahlen befreite“ an den elementaren Rechenoperationen ihre Eigenschaften hervor und definiert dann mit Hilfe solcher Eigenschaften die drei Begriffe. Aus einem Integritätsbereich wird der Quotientenkörper konstruiert, und es wird die Isomorphie von „Bereichen“ behandelt. Er schreibt über Isomorphieaussagen, daß sie „die Struktur der Bereiche“ betreffen. Es folgen Ausführungen über Gruppen, Untergruppen und Faktorgruppen, auch Normalteiler. Nach diesen beiden strukturellen Kapiteln kommen zwei Kapitel über lineare Algebra, in denen es um lineare Gleichungssysteme geht und in denen er Ideen von TOEPLITZ aufgreift. Das entspricht seinem Programm, eine Theorie der Gleichungen zu entwickeln. Vektoren sind hier n-Tupel aus einem Körper. Zum allgemeinen Begriff des Vektorraumes kommt er in seinem Buch noch nicht.

Den zweiten Band (HASSE 1927) beginnt er mit einer parallelen Betrachtung der Teilbarkeitslehre im Polynomring über einem Körper und über dem Ring der ganzen Zahlen. Es folgen Ausführungen über Wurzeln und Linearfaktoren von Polynomen. In einem Kapitel über Körper der Wurzeln algebraischer Gleichungen behandelt er nach dem Vorbild von STEINITZ Körpererweiterungen. Die Galoistheorie wird dann in einem Kapitel über die Struktur der Wurzelkörper algebraischer Gleichungen entwickelt. Das Buch schließt mit Ausführungen über die Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen durch Wurzelziehen.

Der Einfluß von STEINITZ und TOEPLITZ, denen er in Kiel begegnete, ist durch das ganze Buch spürbar. Der 28jährige HASSE hat sich voll der modernen Algebra verschrieben. Für den Anhänger der klassischen Algebra dagegen fehlen alle Sätze und Verfahren zur konkreten Berechnung der Wurzeln algebraischer Gleichungen. So verzichtet HASSE „leichten Herzens“ auf die Sätze von Bezout, Sturm und Budan-Fourier, auf die Näherungsverfahren von Newton, Bernoulli, Gräffe und Lagrange. Der Fundamentalsatz der Algebra wird als „der sog. Fundamentalsatz der Algebra“ kommentiert und für die Algebra abgewertet; statt dessen wird auf die Bedeutung des Satzes von Kronecker und STEINITZ über die Existenz des Wurzelkörpers hingewiesen. Der Hauptsatz über symmetrische Funktionen wird am Ende beiläufig angesprochen. Die Galoistheorie ist für ihn nicht Auflösungsverfahren, sondern „Strukturuntersuchung der algebraischen Erweiterungskörper, und das Studium der Resolventen gibt näheren Einblick in die formalen Zusammenhänge der Bausteine dieser Körper“ (HASSE 1928, S.122). Zwar behandelt HASSE zum Schluß den Satz von Abel, aber wie man quadratische, kubische und biquadratische Gleichungen löst, erfährt der Leser nicht. Auch die Anwendung der algebraischen Resultate auf Konstruierbarkeitsfragen fehlt.

HASSE hat also „viel Ballast über Bord geworfen“. In der Darstellung ist er um größte Exaktheit bemüht. Begriffe werden durch hinführende Überlegungen vorbereitet, dann aber durch ausgewiesene und numerierte Definitionen eingeführt. Auch die Sätze sind als solche gekennzeichnet. In den Beweisen wird auf die verwendeten Definitionen und Sätze Bezug genommen. Durch den Wegfall langer Umformungen und Rechnungen entsteht der Eindruck einer modernen axiomatisch aufgebauten Theorie.

Im ersten Band werden immer wieder erläuternde Beispiele gegeben. Diese fehlen jedoch im zweiten Band ganz. Auch Übungsaufgaben werden zunächst nicht gestellt. Später erscheint ein eigener Band mit Übungen (HASSE 1934). Hervorzuheben sind die richtungweisenden Überlegungen zu Beginn neuer Abschnitte, in denen über Ziele gesprochen wird. Wichtige Ergebnisse werden auch ausführlich kommentiert und häufig gewertet. RICHARD BRAUER schreibt:

> „Das überaus sorgfältig aufgebaute Buch stellt eine leicht verständlich geschriebene Einführung in die höhere Algebra dar, bei der der moderne abstrakte Standpunkt konsequent durchgeführt wird; es ist das erstemal, daß dies in einem Lehrbuch geschieht.“ (BRAUER 1928, S.83)

Obwohl es das *erste* Lehrbuch dieser Art ist, bleibt seine Wirkung doch sehr begrenzt. Ein nächster Versuch, die moderne Algebra überzeugend darzustellen, stammt von OTTO HAUPT.

7. Otto Haupts „Algebra“

OTTO HAUPT (1887-1988) war Schüler von EMIL HILB (BARNER/FLOHR 1987). Bis in die zwanziger Jahre hatte er sich überwiegend mit Fragen der Analysis und der Geometrie beschäftigt. Als er 1921 nach Erlangen berufen wird, lernt er EMMY NOETHER kennen die ihn für die neuen Ideen in der Algebra begeistert. Er nimmt schließlich die Einladung von EMIL HILB an, für die von ihm herausgegebene Lehrbuchsammlung eine Algebra zu schreiben. HILB hatte wohl an eine klassische Algebra gedacht. HAUPT aber hatte von den neuen Ideen Feuer gefangen. So schrieb er eine moderne Algebra.

Er beginnt mit Körpern, bringt dann Integritätsbereiche und konstruiert den Quotientenkörper. Nach einem Kapitel über Gruppen folgt eine Teilbarkeitstheorie über den ganzen Zahlen, an die sich Betrachtungen von Restklassenringen anschließen. Transzendente Erweiterungen von Ringen und Körpern führen zu den Polynomringen, für die eine Teilbarkeitslehre entwickelt wird. Ausführlich werden dann klassische Verfahren zur Lösung von Gleichungen 3. und 4. Grades sowie von reinen Gleichungen behandelt.

Im zweiten Band bringt HAUPT zunächst den Fundamentalsatz der Algebra im Zusammenhang mit der Existenz von Wurzeln und die klassischen Sätze über die Lage von Nullstellen und die Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung der Nullstellen. Es folgen dann die Galoistheorie mit ihren Anwendungen und weitere Ausführungen zur Körpertheorie.

Man merkt dem Buch den starken Einfluß der Arbeit von STEINITZ an. HAUPT hat immer wieder auf die Bedeutung dieser Arbeit für sein Verständnis von Algebra hingewiesen. Im Aufbau findet man manche Anklänge an das Buch von HASSE. Dies gilt zunächst für die strukturelle Sicht, den klaren axiomatischen Aufbau und die Algebra als Theorie der Gleichungen. Es finden sich auch im einzelnen manche Parallelen; so werden gleich zu Beginn Integritätsbereiche und ihre Quotientenkörper betrachtet, was sich dann auch bei zahlentheoretischen Fragestellungen niederschlägt. Im Gegensatz zu HASSE „rettet“ aber HAUPT die klassischen Sätze über die Existenz und die Lage von reellen Nullstellen sowie die Näherungsverfahren. Hier kann er sich bereits auf die Arbeit von ARTIN und SCHREIER (1926) stützen.

Das Buch von HAUPT ist eine Fundgrube didaktischer Ideen: Fragestellungen werden sorgfältig entwickelt. Meist werden zu Beginn die Ziele der Untersuchung angegeben. Es werden graphische Darstellungen über Zusammenhänge gegeben. Immer wieder finden sich „Wegweiser“ durch die Kapitel. Insbesondere werden Hinweise gegeben, welche Passagen wichtig sind im Hinblick auf spätere Betrachtungen oder welche Abschnitte bei erster Lektüre weggelassen werden können. Ausdrücklich wird immer wieder auf Schulwissen hingewiesen. Damit knüpft er an Vorwissen an, zugleich schlägt er aber auch für den künftigen Lehrer eine Brücke zum Schulstoff. Äußerlich wählt er den strengen Stil einer axiomatisch aufgebauten Theorie. Doch regelmäßig werden Kommentare abgegeben, Beispiele behandelt und interessante Aufgaben angeboten. In den Kommentaren wird auch immer wieder die Methode reflektiert. So schreibt er:

> „Allgemein werden die Grundbegriffe einer mathematischen Disziplin ... durch implizite Definition vermittels Postulaten festzulegen sein, so daß aus diesen Postulaten alle ‚einschlägigen' Sätze rein logisch hergeleitet werden können. Die inhaltliche Interpretation der Begriffe und Relationen tritt dabei völlig zurück; die Behandlung der Disziplin ist ‚formalisiert'. Der Vorteil einer solchen formalen Behandlung von Disziplinen besteht in einer Beweisökonomie: Alle einschlägigen Sätze gelten gleichzeitig für jede zulässige Interpretation.“ (HAUPT 1,1929, S.39)

In seiner Besprechung des Buches gesteht LUDWIG BIEBERBACH ein, daß es wohl zum Wesen der Mathematik gehört, „begrifflichem Schließen den Vorrang vor rechnerischem Operieren“ zu geben. Auch versteht er das Anliegen, „sich peinlich Rechenschaft zu geben von denjenigen Eigenschaften der Begriffe, die für einen Beweis wesentlich sind, schließlich die Begriffe so abzugrenzen, daß nur die wirklich notwendigen Eigenschaften ihnen zukommen.“ Dann spürt man aber sein Unbehagen, wenn er schreibt:

> „Doch will mir beim Blick über dies Buch wohl die straffe Einheitlichkeit der Darstellung imponieren, will mir gefallen, wie die gemeinsamen formalen Hintergründe sonst nur verwandt erscheinender Theorien zum Vorschein kommen. Doch vermag ich nicht zu sehen, inwieweit die größere Abstraktheit der Darstellung dem stofflichen Gehalt der Algebra zum Vorteil gereicht ... Wer aber über der abstrakten Theorie sich Sinn für konkrete Aufgaben bewahrt hat, kann von Haupts Buch nicht befriedigt werden. Denn schließlich hat doch die neue Tendenz nichts an der alten Aufgabe der Algebra der Polynome einer Unbestimmten – oder Variablen – geändert; es handelt sich doch nach wie vor darum die Eigenschaften der Wurzeln aus denen der Koeffizienten zu ermitteln. Nur möchte sich die neue Generation in der Algebra gerne auf das Formale beschränken, während die alte Generation über Polynome in der Algebra gerne noch etwas mehr zu lernen wünschte. Solche Mathematiker werden also durch Haupts Algebra etwas enttäuscht werden, denn das Skelett allein macht noch keinen Körper. Trotzdem empfehle ich auch dieser Sorte von Mathematikern, zu der ich mich leider selber rechne, dies Buch zur Lektüre. Denn an bekanntem Material gewinnt man einen besonders lebhaften Eindruck von der eigentümlichen Schönheit dieser neuen Richtung und Verständnis für die Begeisterung, mit der eine junge Generation diesen Bahnen folgt.“ (BIEBERBACH 1929, S.98)

Im Rückblick erscheint auch diese Kritik etwas überzogen. Die im Buch benutzten Strukturbegriffe dienen immer noch vorwiegend der Theorie der Gleichungen. Die zahlreichen zahlentheoretischen Bezüge sorgen auch für „Fleisch“ ebenso wie die Verwendung der reellen Zahlen. Allenfalls im letzten Teil zeichnet sich bei den Körpern ein selbständiges Interesse an einer Körpertheorie ab, die „zu ganz neuen Fragen führt“ (S.VIII).

Obwohl das Buch von HAUPT die klassische Algebra modern darstellt und obwohl es ausgezeichnet didaktisch gestaltet ist, bleibt ihm doch der Durchbruch versagt. Abschreckend wirkten vielleicht die breite Darstellung, manche formalen Passagen, die Vielzahl neuer Begriffe, vielleicht auch der Umfang des dargebotenen Stoffes. Angesichts dieser Stoffülle ist es allerdings merkwürdig, wenn z.B. BIEBERBACH die Eliminationstheorie vermißt (BIEBERBACH 1929, S.98). Möglicherweise war vielleicht die starke Bindung an die Gleichungstheorie für die Anhänger der modernen Richtung enttäuschend, die in der Gruppentheorie, der Ring- und der Körpertheorie selbständige algebraische Theorien mit eigenen Fragestellungen und Methoden sahen. HAUPT berichtet in seinen Erinnerungen, daß HILB anfangs heftig Widerstand gegen das moderne Manuskript leistete (HAUPT 1988). Er hatte jedoch in EMMY NOETHER eine überzeugende Fürsprecherin, so daß HILB schließlich zustimmte.

Deutete sich in den Ergänzungen zur Konzeption von HILBS Algebra-Vorlesung bereits der Einfluß der Methodendiskussion in der Algebra an, so schlägt sich die Diskussion mit HAUPT deutlich in einer Neukonzeption seiner Vorlesung für das Wintersemester 1928/29 und das Sommersemester 1929 nieder.

8. Emil Hilbs neu konzipierte Algebra-Vorlesung

Das Vorlesungsmanuskript ist nicht genau datiert, aber es enthält einen Literaturhinweis auf eine Arbeit aus dem Jahre 1928. Im Sommersemester 1928 las HILB keine Algebra; im Wintersemester 1928/29 las er den ersten Teil der Algebra; der zweite Teil der Algebra-Vorlesung im Sommer 1929 war seine letzte Vorlesung. Diese Vorlesung ist völlig neu konzipiert. Sie beginnt mit einem Kapitel über rationale Zahlen, in dem die Begriffe Körper, Ring und Integritätsbereich allgemein eingeführt werden. Dabei wird die Konstruktion des Quotientenkörpers zu gegebenem Integritätsbereich vorgeführt. Nach einigen Ausführungen über komplexe Zahlen folgt ein Kapitel über Gruppen, in dem zunächst allgemein der Gruppenbegriff definiert wird. Es schließen sich Betrachtungen über Untergruppen und dann über Permutationsgruppen an.

Anschließend wird allgemein Teilbarkeitstheorie behandelt, wobei auch hier auf Strukturbegriffe hingewiesen wird, insbesondere auf den Begriff des Ideals. Nach einem Kapitel über das Rechnen mit Polynomen geht er näher auf den ggT von Polynomen und die Partialbruchzerlegung ein. Es folgt ein Kapitel über Körpererweiterungen. Hier findet sich auch ein Paragraph über die Unmöglichkeit der Würfelverdopplung. Der erste Teil schließt mit Fragen der numerischen Auflösung von Gleichungen, wobei es vor allem um Näherungsverfahren (Newton) geht.

Der zweite Teil der Vorlesung befaßt sich zunächst mit der Lage der Wurzeln. Hier werden die Sätze von Budan-Fourier und Descartes angegeben. Ausführlich werden dann symmetrische Funktionen behandelt. Der Fundamentalsatz der Algebra wird nach einem Vorschlag von DÖRGE bewiesen. Das letzte Kapitel beschäftigt sich mit der Auflösung der quadratischen, kubischen und biquadratischen Gleichungen. Es schließt mit dem Gräffe-Verfahren.

Durch die strukturellen Betrachtungen am Anfang wirkt die Vorlesung stärker theorieorientiert, aber später dominieren doch wieder die Verfahren. Dabei muß man allerdings berücksichtigen, daß HILB im Sommersemester 1929 bereits stark unter einer Erkrankung zu leiden hatte So mußte seine Frau ihn zu den Vorlesungen begleiten. Die neue Konzeption der Vorlesung läßt den Einfluß des Buches von HAUPT erkennen. Sie folgt diesem Aufbau in den großen Linien, beschränkt sich aber auf die wesentlichen Gedanken, ohne die Theorie in ihren Einzelheiten zu verfolgen. Allerdings fehlt die Galoistheorie, so daß die Tragfähigkeit der Strukturbegriffe kaum deutlich wird. Immerhin finden sich aber Hinweise darauf. Als roter Faden bleibt auch in dieser Vorlesung das Lösen vor Gleichungen; nach wie vor dienen als Grundlage der Betrachtungen dic Zahlbereiche, die allerdings unter strukturellen Aspekten angesprochen werden. HILB ist damit trotz der Straffung in der Grundkonzeption näher bei HAUPT als bei PERRON. Es ist erstaunlich, zu welcher radikalen Änderung die intensive Diskussion mit HAUPT führte. HILB wird von seinen Schülern allem Neuen gegenüber als aufgeschlossen geschildert. So hat er sich z.B. intensiv für NÖRLUNDS Ideen über Differenzengleichungen eingesetzt und diese weiterentwickelt. Andererseits war er mit seiner zunächst reservierten Haltung gegenüber der modernen Algebra in guter Gesellschaft. Die Situation änderte sich erst grundlegend mit dem Erscheinen von VAN DER WAERDENS zweibändigem Buch: „Moderne Algebra“ in Jahre 1930.

9. Bartel Leendert van der Waerdens „Moderne Algebra“

Für sein Lehrbuch gibt VAN DER WAERDEN als Quellen eine Vorlesung vor Emil ARTIN über Algebra in Hamburg aus dem Sommersemester 1926, ein Seminar über Idealtheorie zusammen mit ARTIN, BLASCHKE und SCHREIER aus dem Wintersemester 1926/27 in Hamburg und Vorlesungen von EMMY NOETHER über Gruppentheorie und hyperkomplexe Zahlen aus dem Wintersemester 1924/25 und dem Wintersemester 1927/28 in Göttingen an. Ausdrücklich heißt es im Titel: „Unter Benutzung von Vorlesungen von E. ARTIN und E. NOETHER“. Für weiterführende Studien verweist er für die Gruppentheone auf „Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung“ von A. SPEISER, für die Körpertheorie auf die Bücher von H. HASSE und O. HAUPT, für die klassische Algebra auf das Buch von O. PERRON, sowie für die lineare Algebra auf L. E. DICKSON, „Modern Algebraic Theories“. In der Einleitung hebt er auch die wichtige Rolle der Arbeit von STEINITZ über die Körpertheorie von 1910 hervor; VAN DER WAERDEN konnte sich also auf eine breite Grundlage stützen. Man erkennt hier, welche große Rolle neben Aufsätzen auch Vorlesungen von Spezialisten spielten. Zugleich muß man jedoch auch sehen, wie begrenzt unter Umständen die Entfaltungsmöglichkeiten für solche Spezialisten waren. So berichtet HAUPT, daß er zwar in Breslau studiert hatte, aber keinen Hinweis auf die Arbeit von STEINITZ erhalten hatte, der dort an der Technischen Hochschule lehrte. Erst durch EMMY NOETHER wurde er auf diese wichtige Arbeit hingewiesen (HAUPT 1988, S.27).

JOHANN VON NEUMANN schreibt über das Buch von VAN DER WAERDEN bald nach seinem Erscheinen:

> „ ‚Moderne Algebra' wird hier ‚abstrakter Algebra' gleichgesetzt, d.i. jener Disziplin, die das Wesen der Algebra in ihren Grundoperationen, den 4 Rechenspezies +, −, ×, :, erblickt, und nicht in den Subjekten dieser Operationen, welche vor dem Auftreten dieser Richtung fast ausschließlich die reellen oder komplexen Zahlen waren. Welche weitgehenden praktischen Konsequenzen diese scheinbar so formale Distinktion hat, kann aus dem vorliegenden Werke nun auch der Anfänger erlernen - sowohl am im ersten Bande zusammengefaßten Bestande der Algebra im engeren Sinne, als auch an den Eliminations-, Ideal- und Darstellungstheoretischen Anwendungen, denen der zweite Band gewidmet ist ... Das Werk ist als einfache, durchsichtige und doch sehr vollständige Zusammenfassung solcher Resultate, die bisher nur mühsam aus der weitverzweigten Literatur der Originalabhandlungen zusammengesucht werden konnten, aufs wärmste zu begrüßen." (VON NEUMANN 1932, S.259-260)

Das Buch von VAN DER WAERDEN bricht den neuen Ideen Bahn. 25 Jahre später nennt er es dem Rat von BRANDT folgend schlicht „Algebra". Dieser hatte geschrieben:

> „Ein Buch, das so viel an bester Mathematik bietet, wie sie war, ist und sein wird, sollte nicht durch den Titel den Verdacht erwecken, als ob es nur einer Modeströmung folgte, die gestern noch unbekannt war und vielleicht morgen vergessen sein wird." (BRANDT 1952, S.48)

Dieses Buch hat für Generationen von Mathematikern das Verständnis von Algebra geprägt. Aber die Umsetzung dieser neuen Auffassung in den Vorlesungen nahm doch Zeit in Anspruch. Zumindest für Europa wurde diese Entwicklung durch den Krieg stark behindert. Erst in den fünfziger Jahren setzte sich z.B. in Würzburg die „moderne Algebra" in den Vorlesungen durch.

Van der Waerdens Buch spricht nach wie vor für sich selbst und kann immer noch als ein Standardwerk, inzwischen wohl als „Klassiker" betrachtet werden. Deshalb will ich darauf verzichten, hier näher auf dieses Buch einzugehen. Vielmehr will ich den Blick auf die Algebravorlesungen in Würzburg in den dreißiger und vierziger Jahren lenken.

10. Otto Volks Algebra-Vorlesung

OTTO VOLK (1892-1989) hatte zunächst an der Technischen Hochschule München bei HEINRICH LIEBMANN den Dr.-Ing. erworben und promovierte dann 1920 bei FERDINAND LINDEMANN an der Universität München mit einer Arbeit über Funktionentheorie (REICH 1989). Er war Assistent bei LINDEMANN, PRINGSHEIM und VOSS und habilitierte sich 1922 in München. Durch VOSS wurde er dann angeregt, sich mit Fragen der Differentialgeometrie zu befassen. 1923 folgte er einem Ruf an die neu gegründete Universität Kaunas in Litauen. Dort leistete er Pionierarbeit, indem er die ersten Mathematikbücher in litauischer Sprache verfaßte. Für viele mathematische Begriffe wurde er damit zum Wortschöpfer. Er gab dort auch ein Skript über Algebra in litauischer Sprache heraus, das jedoch bisher nicht auffindbar war. Als die politischen Verhältnisse immer schwieriger wurden, nahm er 1930 einen Ruf nach Würzburg als Nachfolger von HILB an. 1935 wurde er dann als Nachfolger von EDUARD VON WEBER o. Professor für Mathematik, zwei Jahre später auch für Astronomie. Bereits in Litauen hatte VOLK seine Liebe zur Geschichte der Mathematik entdeckt. Dies schlug sich auch in seinen Vorlesungen nieder. Er las in breitem Schwäbisch, zeichnete sorgfältig den historischen Werdegang nach und stellte zahlreiche Querverbindungen her. Zu seinen Schülern, die er engagiert im Studium förderte, hatte er ein sehr herzliches Verhältnis.

Von OTTO VOLK liegt ein Vorlesungsmanuskript zur Algebra vor, nach dem er im Wintersemester 1938/39 und im Sommersemester 1939 4stündig las. Im Literaturverzeichnis finden sich die Bücher von WEBER, SERRET, BIEBERBACH-BAUER, PERRON, HAUPT, HASSE, VAN DER WAERDEN, KRULL, SCHREIER-SPERNER, FRICKE und LOEWY.

Nach einer ausführlichen Übersicht über die Entwicklung der Algebra schreibt er:

> „In den letzten Jahrzehnten ist die Abstraktion in der Algebra kennzeichnend; ich hoffe, darauf später zurückzukommen."

Er hat es nicht geschafft. Denn die Behandlung der klassischen Algebra nahm ihn zu stark in Anspruch. Wenn man bei den Griechen anfängt, stehen die Chancen schlecht, bis zur Gegenwart vorzudringen! In der Anlage findet sich ein gesondertes Manuskript zur Galoistheorie, das in sich geschlossen ist und wohl Gegenstand einer Spezialvorlesung war. Erst dort entwickelt er auch die Strukturbegriffe.

Die Vorlesung behandelt nacheinander quadratische, kubische und biquadratische Gleichungen. Nach den reziproken Gleichungen wendet er sich der Kreisteilungsgleichung zu. Es folgt ein ausführliches Kapitel über symmetrische Funktionen mit dem Hauptsatz. Im dritten Kapitel werden die klassischen Sätze über die Lage der reellen Lösungen (Descartes, Rolle, Budan-Fourier, Sturm) über Näherungsverfahren (regula falsi, Newton, Lagrange) behandelt. Bemerkenswert ist hier, daß er auch komplexe Lösungen in diese Betrachtungen mit einbezieht. Die Vorlesung schließt mit Ausführungen über lineare Gleichungssysteme und Determinanten sowie einigen Hinweisen auf die E1iminationstheorie.

Die Vorlesung beginnt sehr breit mit den Gleichungstypen. Die historische Entwicklung wird jeweils sehr sorgfältig aufgezeigt. Dabei werden die unterschiedlichen Lösungswege ausführlich gewürdigt. Hier folgt die Vorlesung weitgehend der Konzeption einer genetisch aufgebauten Vorlesung im Sinne von TOEPLITZ (1927). Dabei zeigt er sowohl die Entwicklung der Lösungsverfahren als auch die Beziehungen zu den klassischen geometrischen Konstruktionsproblemen auf. Diese Problemstellung findet sich schon in den ersten Vorlesungen und zieht sich dann durch die ganze Vorlesung. Die historischen Ausführungen zeigen hervorragende Sachkenntnis. Betrachtet man die Vorlesung als Ganzes, dann ist sie weder an Verfahren noch an einer axiomatischen Theorie orientiert, vielmehr ist sie stark problemorientiert. Das führt natürlich auch zu Verfahren und an den entsprechenden Stellen (z.B. symmetrische

Funktionen) auch zur Theorie. Die Vorlesung als Ganzes ist also sicher keine „moderne Algebra“ im Sinne seiner Zeit. Aber didaktisch ist sie doch „modern“, als sie eine originelle didaktische Konzeption vertritt, die zu seiner Zeit von TOEPLITZ propagiert worden war. Die Lehramtskandidaten werden seine Veranstaltung als hoch relevant für die spätere Unterrichtspraxis als Hintergrundwissen betrachtet haben. Auch für die Bewältigung der Examensklausur erhielten sie gute Voraussetzungen.

Der inhaltliche Aufbau seiner Vorlesung erinnert an eine Vorlesung von PRINGSHEIM, die mir vorliegt, dabei stand er als Assistent von PRINGSHEIM sicher unter dessen Einfluß. VOLK hat also zwar seine Studenten auf neuere Entwicklungen hingewiesen; sie haben aber wohl doch keinen wirklichen Eindruck von der neuen Sicht erhalten. Der andere Lehrstuhl war durch JULIUS WELLSTEIN besetzt, einem Geometer, der die Algebra Vorlesungen seinem Kollegen überließ.

Nach dem Krieg war der Lehrbetrieb in Würzburg einige Zeit unterbrochen. Die Verhältnisse konsolidierten sich erst Anfang der fünfziger Jahre mit der Berufung von HERMANN SCHMIDT im Herbst 1951. Bald nach ihm werden HERMANN LUDWIG SCHMID und HERBERT BILHARZ berufen. Sie richten gemeinsam eine Forschungsstelle für Mathematik in Würzburg ein, an der mit Drittmitteln der wissenschaftliche Nachwuchs gefördert werden kann. Viele von den Mitarbeitern haben später Lehrstühle in Mathematik im In- und Ausland erhalten. (Es seien erwähnt: JOHANNES ANDRÉ, ARTUR BERGMANN, HANS-WILHELM KNOBLOCH, HEINZ KÖNIG, KLAUS KRICKEBERG, ERICH LAMPRECHT und STEFAN SCHOTTLAENDER.)

11. Hermann Schmidts Algebra-Vorlesungen

HERMANN SCHMIDT (geb. 1902) war 1927 bei OSKAR PERRON in München mit einer Arbeit zur Theorie der linearen Differentialgleichungen promoviert worden. 1931 habilitierte er sich in Jena mit einer Arbeit über multiplikative

Funktionen. Dort wurde er auch zum apl. Professor ernannt. Nach dem Kriege war er zunächst Dozent in Braunschweig, bis er nach Würzburg berufen wurde. HERMANN SCHMIDT hat breit gestreute mathematische Interessen; in seinen Forschungsarbeiten überwiegen Themen der Analysis im weitesten Sinne. Hinsichtlich der Algebra ist also auch er kein Spezialist. Er bot ein breites Spektrum von Gebieten in seinen Vorlesungen an. Wie MICHAEL NEUBRAND berichtet, griff er dabei nicht auf fertig ausgearbeitete Manuskripte zurück, sondern bereitete sich jeweils neu vor und präsentierte den Inhalt in neuer Zusammenstellung. Er ließ manches weg, was er in einer früheren Vorlesung gebracht hatte und nahm Neues auf, was ihn gerade besonders interessierte. Seine Studenten empfanden die Vorlesungen als sehr inhaltsreich und originell. Seine weit gestreuten Kenntnisse schlugen sich in ausgiebigen Kommentaren nieder, in denen er eine breite Hintergrundinformation gab und Querverbindungen aufwies. Nach der Vorlesung ging er gewöhnlich zum Waschbecken, wusch sich die Hände und betrachtete dann die Tafel. Dabei ließ er wohl in Gedanken noch einmal die Vorlesung ablaufen. Interessierten Studenten, die zurückgeblieben waren und ihm Fragen stellten, hielt er dann gern noch eine weitere Vorlesung „privatissime", wie OTTO KUROPATWA berichtet.

HERMANN SCHMIDT wird als einer der letzten Mathematiker gerühmt, der die klassische Mathematik weitgehend überschaut. Er wurde 1965 zum Mitglied der Bayerischen Akademie der Wissenschaften ernannt.

Zur Algebra liegt mir die Mitschrift einer Vorlesung vor, die HERMANN SCHMIDT zwischen 1948 und 1950 in Braunschweig gehalten hat und die von ARTUR BERGMANN angefertigt wurde. Aus der Würzburger Zeit habe ich von HORST HEROLD eine ausführliche Gliederung einer Vorlesung aus dem Sommersemester 1961 und aus dem Wintersemester 1961/62 erhalten. Schließlich stellte mir HERBERT GLASER eine ausführliche Vorlesungsmitschrift aus dem Wintersemester 1964/65 und dem Sommersemester 1965 zur Verfügung. Damit besteht die Möglichkeit, seine Lehrveranstaltungen zur Algebra auch auf Entwicklungen hin zu untersuchen.

Die erste der genannten Algebra-Vorlesungen wurde anscheinend einsemestrig gelesen. Sie beginnt mit „Algebraischen Bereichen“. Hier werden Gruppen, Ringe und Körper behandelt. Er zeigt dann, wie man zu einem Integritätsbereich den Quotientenkörper konstruiert. Zu den Strukturbegriffen werden vielfältige Beispiele aus unterschiedlichsten Gebieten der Mathematik gegeben: Zahlbereiche, Funktionenmengen, Mengen von Potenzreihen, Restklassen; geometrische Beispiele beziehen sich in erster Linie auf analytische Geometrie. Es folgen Ausführungen über R-Moduln und Systeme linearer Gleichungen. Anschließend werden Linear- und Bilinearformen untersucht. Ausführlich befaßt er sich dann mit „Polynomen und rationalen Funktionen in einer Unbestimmten“. Hier wird zunächst die Teilbarkeit von Polynomen und die Zerlegung in Primpolynome behandelt. Es folgen der Satz von Gauß und das Irreduzibilitätskriterium von „Schönemann und Eisenstein“. Die Vorlesung schließt mit dem Satz von Kronecker und Steinitz über Wurzelkörper.

In der Einleitung zu seiner Vorlesung geht er auf die Entwicklung der Algebra ein. Für ihn befaßt sich Algebra mit den „Strukturgesetzen algebraischer Bereiche“, die „formal, axiomatisch und abstrakt“ untersucht werden. Diese Auffassung deckt sich weitgehend mit der von HASSE. Ebenso wie bei HASSE ist aber auch erkennbar, daß ihm Gleichungen mindestens theoretisch wichtig sind. Sein Beispielapparat zeigt deutlich seine weit gestreuten mathematischen Interessen. Die knapp bemessene Zeit zwingt ihn, sich auf die wesentlichen Gedanken zu konzentrieren, verhindert allerdings eine Behandlung der Galoistheorie. Die klassischen Fragen, wie man Gleichungen konkret löst, fehlen in dieser Vorlesung. Damit entspricht sie in ihrer Intention und in ihrer Anlage weitgehend dem Buch von Rasse. Mit dem Lösen von algebraischen Gleichungen beschäftigt er sich in einer 2stündigen Spezialvorlesung (z.B. im Sommersemester 1948), in der konkrete Verfahren im Vordergrund stehen.

Die Würzburger Vorlesungen sind wesentlich ausführlicher. Die Vorlesung aus dem Sommersemester 1961 und dem Wintersemester 1961/62 behandelt im ersten Teil „Algebraische Bereiche“. Nach einer Einführung in Mengen und Verbände werden Gruppen betrachtet. Dabei beginnt er mit Permutationsgruppen, behandelt dann Untergruppen, Normalteiler, Restklassen, Homomorphie und Isomorphie. Ausführlich werden dann Ringe und Integritätsbereiche studiert, wobei besonderer Wert auf Teilbarkeitsfragen gelegt wird. Es folgt ein Abschnitt über Erweiterungsbereiche, der sich mit Quotientenkörpern, euklidischen Ringen, Bewertungen und Polynombereichen befaßt. Polynombereiche werden dann eingehender untersucht, insbesondere werden hier die Gleichungen 3. und 4.Grades gelöst. Anschließend wird ausführlich Teilbarkeitstheorie in Polynombereichen getrieben. Dann folgen Ausführungen über Resultanten und symmetrische Funktionen. Der erste Teil schließt mit einem Abschnitt über Zerfällungskörper.

Den zweiten Teil nennt er „Struktur algebraischer Erweiterungen Galoistheorie". Hier wird zunächst ein Überblick über Körpertypen gegeben, es folgen Ausführungen über algebraische Erweiterungen. Zentrales Thema ist die Galoistheorie mit dem Hauptsatz. Es wird dann die Gleichung 4.Grades gruppentheoretisch behandelt. Danach wird allgemein die Auflösbarkeit durch Radikale untersucht. Zyklische und abelsche Gleichungen schließen den Abschnitt ab. Die Vorlesung endet mit Ausführungen über Konstruktionen mit Zirkel und Lineal.

Algebra ist hier deutlicher Strukturtheorie. HERMANN SCHMIDT ist damit jetzt näher bei VAN DER WAERDEN als bei HASSE.

Die folgende Algebra-Vorlesung (WS 1964/65; SS 1965) unterscheidet sich vor allem durch die ausführlicheren Betrachtungen von Halbordnungen und Verbänden zu Beginn, dann aber auch durch eine nun weitläufige Untersuchung zahlentheoretischer Fragen. So behandelt er in einem Paragraphen: „Kommutative Bereiche - Zahlentheorie" ausführlich Restklassenringe, lineare Kongruenzen, simultane Kongruenzen, quadratische Reste und Potenzreste, eine Theorie der p-adischen Zahlen (in Anlehnung an HENSEL), periodische Dezimaibrüche, das quadratische Reziprozitätgesetz und das Henselsche Lemma. Ausgehend vom Enklidischen Algorithmus findet sich auch eine Betrachtung über Kettenbrüche, mit der er ein persönliches Forschungsgebiet anspricht. Gegen Ende der Vorlesung wird dann die Zeit etwas knapp, so daß er nicht mehr die Konstruierbarkeitsfragen anschneiden kann. Zum Fundamentalsatz der Algebra gibt er einen Beweis nach DÖRGE.

Gegenüber den klassischen Vorlesungen von ROST, HILB und VOLK fällt die große Breite und Fülle der behandelten Inhalte auf. Schmidts Vorlesungen sind stark theoretisch orientiert, wobei er sich allerdings nicht zu sehr axiomatisch und methodisch einengen läßt. Er stellt immer wieder Bezüge zur Analysis, Zahlentheorie und Geometrie her. Auch in den Übungen werden Aufgaben aus vielen anderen Gebieten gestellt. Fragen über die Lage und die näherungsweise Berechnung der Wurzeln algebraischer Gleichungen finden sich allerdings nicht in dieser Vorlesung. Sie gehören für ihn wohl mehr in den Bereich der numerischen Mathematik. (Zu dieser Zeit war Angewandte Mathematik in Würzburg durch FRIEDRICH SOMMER vertreten.)

Mit HERMANN SCHMIDT hat sich der Wandel in der Auffassung von Algebra in Würzburg nun auch in den Vorlesungen vollzogen. Seine Einschätzung der Entwicklungen kommt in einem Vortrag über „Strömungen der neueren Mathematik“ 1959 auf der Hauptversammlung des „Fördervereins“ in Würzburg zum Ausdruck. Hier verweist er auf die Bedeutung Bourbakis für die strukturelle Sicht der Algebra. Der entscheidende Schritt zur modernen Algebra lag für ihn in der Ablösung der Betrachtung der Rechenoperationen von konkreten Zahlbereichen:

> „Beschränkt man die Rechensymbole auf Zahlen (oder Zahlsysteme), bzw. Variable im Sinne der Analysis, d.h. Zeichen für in gewissen Spielräumen willkürlich oder gesetzmäßig veränderliche Zahlen, so erhält man eine für uns heute unerträgliche Verengung; im 19. Jahrhundert hat man wohl vielfach die Algebra noch so verstanden, es findet sich aber auch durchaus schon der moderne Gesichtspunkt etwa bei Dedekind, Kronecker, Weber u.a.... Man könnte nun mit guten Gründen die letzten Jahrzehnte ein Zeitalter der Algebraisierung der Mathematik nennen, so umfassend haben die angedeuteten Begriffe und ihre Erweiterungen von fast allen Gebieten

Besitz ergriffen;..." (SCHMIDT 1959/60, S.201)

Sein Anliegen ist bei diesem Vortrag, den Lehrern zu helfen, „auch im Unterricht der sich wahrhaft überstürzenden Entwicklung in der Forschung, wenn auch nicht stofflich, so doch durch Geist und Auffassung gerecht zu werden" (SCHMIDT 1959/60,S.200). Bald darauf setzten dann ja unter dem Einfluß von HEINRICH BEHNKE und HANS-GEORG STEINER die Bemühungen ein, diese Entwicklungen sinnvoll in den Unterricht einzubringen (DAMEROW 1977). Seit Beginn der sechziger Jahre sind die in Würzburg ausgebildeten Lehramtskandidaten in der Lage, an diesen Diskussionen kompetent teilzunehmen.

12. Lehrbücher und Vorlesungen in didaktischer Sicht

Betrachtet man einige Unterschiede zwischen den Lehrbüchern und den Vorlesungen, so fällt zunächst auf, daß die Lehrbücher in der Regel um große stoffliche Breite bemüht sind, während die Vorlesungen, selbst wenn sie sich über zwei Semester erstrecken, deutlich bescheidener im Angebot der Inhalte sind, obwohl auch die Bücher häufig auf Vorlesungen beruhen sollen. Wo im Lehrbuch ein Zwang zur Vollständigkeit bei den Beweisen und beim hierarchischen Aufbau der Sätze in der Theorie besteht, ersetzen Vorlesungen Beweise häufig durch Mitteilungen der Beweisidee und führen Sätze auch ohne Beweis an. Der Aufbau der klassischen Vorlesungen setzt sich aus einzelnen Themenbereichen zusammen in denen ein Problem behandelt wird, dessen Lösung häufig durch einzelne Sätze gesichert ist. Es entsteht damit eher der Eindruck in sich geschlossener thematischer Einheiten, die einer größeren Linie folgen. Die klassischen Vorlesungen wirken damit weniger streng hierarchisch, als dies bei den Lehrbüchern und den modernen Vorlesungen der Fall ist. Sowohl HAUPT als auch VAN DER WAERDEN versuchen, die strenge Hierarchie aufzubrechen, indem sie Hinweise geben, wie man auf verschiedenen Wegen das Buch durcharbeiten kann, welche Inhalte weggelassen werden können und wo Ergänzungen in weiterführender Literatur zu finden sind.

Generell muß man jedoch sagen, daß sowohl die Lehrbücher als auch die Vorlesungen, in denen Algebra strukturtheoretisch dargestellt wird, eine wesentlich größere Vielfalt von Fragestellungen, Begriffen, Sätzen und Herleitungen bringen als die klassischen Bücher und Vorlesungen. Der Zuwachs an Erkenntnis und Klarheit muß allerdings für den Lernenden durch einen deutlich gestiegenen Bedarf an notwendigen theoretischen Kenntnissen erkauft werden.

Die starke Betonung der Rechnungen in den klassischen Vorlesungen setzt selbstverständlich die Beherrschung der Termumformungen aus der Schulalgebra voraus. Auch Begriffe aus anderen Vorlesungen werden häufig erwartet. Lehrbücher erwecken dagegen gern den Eindruck, es würden keine Kenntnisse vorausgesetzt. Das ist natürlich illusionär, denn selbst wenn die für das Verständnis der Beispiele benötigten Informationen gegeben werden (wie bei HAUPT), so werden doch an die Bereitschaft und die Fähigkeit, sich intensiv mit der Theorie auseinanderzusetzen, erhebliche Anforderungen gestellt.

Daß die klassischen Vorlesungen so stark das Konkrete betonen, liegt sicher an der konservativen Sicht von Algebra. Es dürfte aber auch an einer gewissen Orientierung an den Examensaufgaben liegen. Schließlich erwarteten sicher die Studenten solche konkreten Überlegungen.

Was die fehlende Behandlung der Strukturbegriffe in den traditionellen Vorlesungen anbelangt, so ist anzunehmen, daß die Professoren diese Begriffe in der Hierarchie mathematischer Begriffe so hoch ansiedelten, daß sie diese für ungeeignet für eine Grundvorlesung hielten. Dies änderte sich nur bei HILB unter dem Eindruck der sehr intensiven Auseinandersetzung mit HAUPT. Es ist erstaunlich, wie stark bei diesen Professoren offensichtlich ihre eigene Auffassung über Algebra von den Vorlesungen geprägt war, die sie selbst als Studenten gehört hatten. HERMANN SCHMIDT hat sich jedoch grundlegend von den eingeengten Vorstellungen aus seiner Studienzeit gelöst. Er gehörte allerdings auch der „jüngeren Generation“ an.

Wir hatten gesehen, daß die neue Sicht der Algebra in den Lehrbüchern zu einer anderen Wertung von Sätzen führte. Am deutlichsten wurde dies beim

Fundamentalsatz der Algebra. Dieser Satz ist in den klassischen Vorlesungen unangefochten fundamentaler Satz der Algebra. Offensichtlich sind Wertungen auch bei Professoren recht stabil. Man hat dabei den Eindruck, daß sie sich durchaus nicht immer bewußt sind, wie subjektiv solche Wertungen sind (VOLLRATH 1988). Diese Wertungen beziehen sich vor allem auch auf das Grundanliegen der Theorie Wir haben gesehen, daß es selbst für HASSE und HAUPT bei der Algebra um eine Theorie der Gleichungen ging. Strukturtheorie zeigte sich bei ihnen erst in Ansätzen. Die Schwierigkeiten der älteren Generation kommen sehr deutlich in dem Zitat von BIEBERBACH zum Ausdruck, für den die höhere Allgemeinheit der Theorie keine wesentlich neuen Ergebnisse für konkrete Probleme liefert. Letztlich sahen sie dann keine Notwendigkeit, ihre Sicht von Algebra zu revidieren. Selbst bei HERMANN SCHMIDT hatten jüngere Dozenten den Eindruck, daß er der Strukturmathematik doch nur insoweit zustimmte, als sie zur Lösung konkreter Probleme nützlich war. Bis zu einem gewissen Grade bewahrte ihn diese Position vor einer unkritischen Überbewertung der Strukturmathematik, wie sie bei Anhängern Bourbakis häufig zu finden war.

Was Modernisierungen anbelangt, so war es im Hinblick auf die „mathematische Öffentlichkeit" für Vorlesungen sicher leichter als für Lehrbücher, am Althergebrachten festzuhalten. Trotzdem ist es erstaunlich, daß selbst die Klassiker noch nach Erscheinen des „VAN DER WAERDEN" Neuauflagen erlebten. Auch in den dreißiger Jahren erschienen immer noch weniger radikal neu orientierte Bücher zur Algebra; man denke etwa an die Algebra von WOLFGANG KRULL aus dem Jahre 1939.

Wir hatten eingangs davon gesprochen, daß sich neue Erkenntnis über Vorlesungen schnell Bahn brechen kann. Tatsächlich geschieht das bei den Spezialisten. Vorlesungen sind dann eine wichtige Vorstufe für neue, wegweisende Lehrbücher. Die Kursvorlesungen der Nicht-Spezialisten hinken aber erheblich hinterher. Als 1930 das Buch von VAN DER WAERDEN erschien, war die Arbeit von STEINITZ bereits ein Klassiker was sich z.B. darin ausdrückte, daß sie 1930 als Buch mit Kommentaren von BAER und HASSE herausgegeben wurde. Alle neuen Algebra-Bücher berufen sich auf dieses Werk. Diese Forschungsarbeit hat also die Lehre ungemein befruchtet. Umgekehrt haben die Vorlesungen von EMMY NOETHER die Forschung stark angeregt. Eine Vorlesungsausarbeitung ist deshalb sogar in die Gesammelten Abhandlungen (NOETHER 1983) aufgenommen worden. In diesem Bereich ist also die unmittelbare gegenseitige Befruchtung von Forschung und Lehre ersichtlich. Bei den Vorlesungen der Nicht-Spezialisten ist sie dagegen kaum erkennbar.

Wenn man bedenkt, wie wenige Mathematik-Professoren in der ersten Hälfte des Jahrhunderts an den einzelnen Deutschen Universitäten waren (SCHARLAU 1990), so ist zu erkennen, daß weder in der Forschung noch in der Lehre das ganze Spektrum der Mathematik an jeder Hochschule angemessen vertreten war. Das führte dazu, daß letztlich die Studenten nur in einzelnen Bereichen die Chance hatten, Vorlesungen zu hören, die dem Stand der Entwicklung entsprachen. Es ist daher unsinnig, die Anzahl der benötigten Mathematik-Professuren an den Hochschulen in erster Linie von den Studentenzahlen her zu sehen.

Wir haben wiederholt davon gesprochen, daß eine Lehrveranstaltung für den künftigen Mathematikunterricht des angehenden Lehrers „relevant“ war. Dies bezog sich vor allem auf das Thema „Gleichungen“. Traditionell werden in der Mittelstufe des Gymnasiums quadratische Gleichungen und auf der Oberstufe im Rahmen von Kurvendiskussionen auch Gleichungen höheren Grades behandelt. Die Zerlegung in Linearfaktoren, die Teilbarkeitsfragen, die Sätze über die Anzahl der Wurzeln einer ganzen rationalen Gleichung werden im Unterricht erarbeitet oder mindestens mitgeteilt. Als Nährungsverfahren für Gleichungen höheren Grades gehören seit Beginn des Jahrhunderts die regula falsi und das Newton-Verfahren zum Standard-Stoff. Der Vietasche Wurzelsatz wird bereits in der Mittelstufe bei den quadratischen Gleichungen behandelt. All dies fand sich in der traditionellen Algebra-Vorlesung. Betrachtungen über symmetrische Funktionen machten z.B. dem Studenten den mathematischen Hintergrund des Vietaschen Wurzelsatzes verständlich. Durch die genetische Darstellung, wie sie VOLK in seiner Vorlesung gab, erfuhren die

Studenten etwas von der Problemgeschichte und erhielten dabei das Sachwissen, um selbst einen genetischen Unterricht erteilen zu können. In einem entscheidenden Punkt aber versagten diese traditionellen Vorlesungen: Indem sie den Studenten auf diesem Gebiet den Einblick in die neueren Entwicklungen vorenthielten, erschwerten sie es dem angehenden Lehrer, in seinem Unterricht ein „gültiges Bild“ von Mathematik zu geben, was ja eine der zentralen Aufgaben des Mathematikunterrichts am Gymnasium ist (FLITNER 19602).

Mit dem späten Eindringen der modernen Ideen in die Vorlesungen verzögerte sich die Aufnahme dieser Ideen durch die Lehramtskandidaten. Da sie nur selten Spezialvorlesungen hörten, ist es verständlich, daß die große Mehrheit der Mathematiklehrer zu Beginn der sechziger Jahre überhaupt keinen Zugang zu den damals diskutierten didaktischen Vorschlägen hatte (DAMEROW 1977). Wenn man bedenkt, welche Schwierigkeiten Mathematikprofessoren mit den neuen Ideen hatten, kann man aber den von ihnen ausgebildeten Lehrern keinen Vorwurf machen.

Andererseits berichten Lehramtskandidaten heute immer wieder, daß sie in den sehr abstrakten strukturorientierten Algebra-Vorlesungen überhaupt keine Schulrelevanz mehr erkennen. Dort, wo didaktische Lehrveranstaltungen angeboten werden, gehört immerhin in der „Didaktik der Algebra“ die Auseinandersetzung mit algebraischen Strukturen im Hinblick auf den Mathematikunterricht zum Standard-Inhalt (VOLLRATH 1974). Solche Veranstaltungen können also Brücken schlagen zwischen der Mathematik an der Universität und der Schulmathematik. Wenn Mathematik-Professoren meinen, ihre Studenten könnten diese Verbindung selbst schaffen so erweist sich dies in der Praxis meist als Illusion. Auch die Referendarausbildung kann dies kaum leisten. Es ist also unverständlich, wenn immer wieder die Notwendigkeit mathematikdidaktischer Lehrveranstaltungen für angehende Gymnasiallehrer bezweifelt wird.

Literatur

Artin, E. und O. Schreier, Algebraische Konstruktion reeller Körper, Abh. Math. Sem. Hamburg 5 (1925), 83-115.

Barner, M. und F.Flohr, Otto Haupt zum 100.Geburtstag, Jahresber. d. DMV 89 (1987), 61-80.

Bieberbach, L. und G. Bauer, Vorlesungen über Algebra, Leipzig 1933[5].

Bieberbach, L., O. Haupt, Einführung in die Algebra, Jahresber. d.DMV 38 (1929), kursiv 97-98.

Brandt, H., B.L. van der Waerden, Moderne Algebra 1, Jahresber. d. DMV 55 (1952), kursiv 47-48.

Brauer, R., H.Hasse, Höhere Algebra 1. Lineare Gleichungen, Fortschr. d. Math. 52 (1926), 83.

Damerow, P., Die Reform des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe 1. Bd.1, Stuttgart 1977

Dedekind, R. und H. Weber, Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen, Journ. Math. 92 (1882), 181-290.

Flitner, W., Hochschulreife und Gymnasium.,Heidelberg 1960[2].

Fricke, R., Lehrbuch der Algebra. I, II, III, Braunschweig 1924/26/28.

Hasse, H., Höhere Algebra. Bd.1, Bd.2, Berlin 1926/27

Hasse, H., O. Perron, Algebra, Bd.1, Jahresb. d. DMV 37 (1928), kursiv 121-123.

Hasse, H., Die moderne algebraische Methode, Jahresb. d. DMV 39 (1930), 22-34.

Hasse, H., Aufgabensammlung zur Höheren Algebra, Berlin 1934.

Haupt,O., Einführung in die Algebra.,Teil 1/2, Leipzig 1929.

Haupt, O., Emil Hilb, Jahresber. d. DMV, 42 (1933), 183-198.

Haupt, O., Georg Rost, Jahrbuch d. Bayer. Akad. d. Wiss. (1959), 170-172.

Haupt, O., Erinnerungen des Mathematikers Otto Haupt, Erlangen (LATEX) 1988.

Krull, W., Elementare und klassische Algebra, I, II, Berlin 1939.

Lampe, E. (Lp.), Heinrich Weber, Lehrbuch der Algebra, Bd.1, Fortschr. d. Math., 26 (1895), 102-104.

Loewy, A., Lehrbuch der Algebra, Teil 1, Teil 2, Leipzig 1915.

Netto, E., Vorlesungen über Algebra, Bd.1, Bd.2, Leipzig 1896/1899.

Neumann, J. von, B.L. van der WAERDEN, Moderne Algebra, Teil 1, Acta Szeged 5 (1932), 259-260.

Noether, E., Gesammelte Abhandlungen, Hrsg. von N. Jacobson, Berlin 1983.

Perron, O., Algebra, Bd.1, Bd.2, Berlin 1927.

Petersen, J., Theorie der algebraischen Gleichungen, Kopenhagen 1878.

Reich, K., Nachruf auf Otto Volk., Nachrichtenblatt d.Dtsch.Ges. f.Gesch. d. Med., Nat. u.Techn. 39 (1989), 121-124.

Scharlau, W., Mathematische Institute in Deutschland 1800-1945, Braunschweig 1990.

Schmidt, H., Strömungen der neueren Mathematik, MNU 12 (1959/60), 200-207.

Schmidt, H., Oskar Perron, Jahrbuch Bayer. Akad. Wiss., München 1976, 217-227.

Schreier, O. und E. Sperner, Einführung in die analytische Geometrie und Algebra, 1,11, Leipzig 1931/1935.

Serret, J.-A., Handbuch der höheren Algebra, 1,11, 1878/1879.

Steinitz, E., Algebraische Theorie der Körper, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 137 (1910), 167-309.

Steinitz, E., Algebraische Theorie der Körper, Hrsg. von R. Baer und H. Hasse, Berlin 1930.

Toeplitz, O., Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihre Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung der höheren Schulen, Jahresb. d. DMV 36 (1927), 90-100.

Volk, O., Mathematik, Astronomie und Physik in der Vergangenheit der Universität Würzburg, In: P. Baumgart (Hrsg.), Vierhundert Jahre Universität Würzburg, Neustadt a.d.A. 1982, 751-785.

Vollrath, H.-J., Didaktik der Algebra, Stuttgart 1974.

Vollrath, H.-J., Mathematik bewerten lernen, In: P. Bender (Hrsg.), Mathematikdidaktik, Theorie und Praxis, Festschrift für Heinrich Winter, Berlin 1988, 202-209.

Voss, A., Heinrich Weber, Jahresb. d. DMV 23 (1914), 431-444.

Waerden, B.L. van der, Moderne Algebra, 1, Berlin 1930.

Weber, H., Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie, Math. Ann. 43 (1893), 521-549.

Weber, H.., Lehrbuch der Algebra, Bd.1/2, Braunschweig 1895/96.

Weber, H., Lehrbuch der Algebra., Bd.3, Braunschweig 1908.

Weber, H., Lehrbuch der Algebra, Kleine Ausgabe in einem Bande, Braunschweig 1912.

Weber, H. und J. Wellstein, Enzyklopädie der Elementarmathematik, Bd.1, Leipzig 1903.

Wussing, H., Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffs, Berlin 1969.