33. Die Bedeutung von Hintergrundtheorien für die Bewertung von Unterrichtssequenzen

Der Mathematikunterricht 25 Heft 5 (1979), 77-89.

1. Zum Begriff der Hintergrundtheorie in der didaktischen Diskussion

Die einer Unterrichtssequenz zugrundeliegende mathematische Theorie wird in der didaktischen Diskussion häufig als *Hintergrundtheorie* bezeichnet (BEKKER 1977, HOLLAND 1974). Damit wird ausgedrückt, daß sich die Unterrichtssequenz einerseits auf eine mathematische Theorie bezieht, daß aber andererseits durch didaktische Maßnahmen für ausreichende Distanz zur mathematischen Theorie gesorgt ist. Bei BECKER und HOLLAND ist dabei wohl im wesentlichen an die axiomatische Darstellung einer mathematischen Theorie gedacht. So beschreibt BECKER diese Theorie als „die mathematisch vollständige und hinsichtlich der Strenge und Präzision homogene Darstellung dieses inhaltlichen Bereiches“. Für HOLLAND ist eine Hintergrundtheorie des Geometrieunterrichts der Sekundarstufe I eine lückenlose axiomatische Darstellung der euklidischen Geometrie der Ebene, die unter didaktischen Gesichtspunkten konzipiert ist (S.7).

Häufig ist eine solche systematische Darstellung erst unter dem Einfluß didaktischer Zielsetzungen entwickelt worden. Dies ist eine begrüßenswerte neue Entwicklung in der Didaktik der Mathematik. Während in der Vergangenheit Mathematikunterricht meist auf vorgegebenen Darstellungen mathematischer Theorien basierte (im extremsten Fall bekanntlich in der jahrhundertelangen Orientierung des Geometrieunterrichts an den *Elementen* des EUKLID), sind in den letzten Jahren zunehmend systematische Darstellungen mit didaktischen Zielsetzungen entstanden. Sie sind das Ergebnis von *didaktischen Sachanalysen*, bei denen, ausgehend von einer didaktischen Vorentscheidung, z.B. Umweltsituationen zum Ausgangspunkt neuer mathematischer Ansätze zu wählen, eine systematische Darstellung einer Theorie entwickelt wird (GRIESEL 1975).

Eine aus einer solchen Analyse hervorgegangene Darstellung einer mathematischen Theorie wird von BECKER in Anlehnung an die entsprechende Terminologie für Axiomensysteme als *heteronome* Hintergrundtheorie bezeichnet. Greift man dagegen beider Konzeption einer Unterrichtssequenz auf eine vorliegende Systematik zurück, dann erhält man eine *autonome* Hintergrundtheorie (BECKER 1977). Das entscheidende didaktische Problem besteht nun im Verhältnis von Hintergrundtheorien zu Unterrichtssequenzen.

Einerseits ist es klar, daß z.B. „ein deduktiver Aufbau dem Geometrie für den Geometrieunterricht in der Schule weder möglich noch sinnvoll ist. Unter dieser Voraussetzung darf die der Hintergrundtheorie notwendig innewohnende Systematik bei der Organisation von Lernsequenzen für den Geometrieunterricht in der Schule nur eine untergeordnete Rolle spielen.“ (HOLLAND S.9).

Andererseits wird die der Hintergrundtheorie eigene Systematik häufig doch Leitfunktion haben. Dann läßt sich der Unterschied zwischen Schulkurs und Hintergrundtheorie durch die *Lückenhaftigkeit* des Schulkurses beschreiben, die durch „Ersetzung strenger Begründungen durch Plausibilitätsüberlegungen“, „Auslassen von Passagen, die ‚anschaulich selbstverständlich‘ sind“ und „Ersetzung strenger Definitionen durch Übernahme umgangssprachlicher oder intuitiver Verwendungsweisen der Begriffe“ bestimmt ist (BECKER 1977).

Im folgenden soll das Verhältnis von Hintergrundtheorien zu Unterrichtssequenzen an zwei Beispielen betrachtet werden. In beiden Fällen handelt es sich um heteronome Hintergrundtheorien. Die zugehörigen Entwicklungsprozesse scheinen mir besonders geeignet zu sein, das Verhältnis von Unterrichtssequenz zur Hintergrundtheorie kritisch zu beleuchten.

2. Zur Entwicklung von Hintergrundtheorien und Lernsequenzen

Bei der *Bruchrechnung* handelt es sich um ein traditionelles Unterrichtsgebiet, das in Jahrhunderten gewachsen ist. Ein großer Teil der ausgefeilten Termino-

logie findet sich bereits bei ADAM RIESE und auch der Beispielbereich ist lange unverändert geblieben. Als gegen Ende des vorigen Jahrhunderts der Zahlbegriff mathematisch fundiert wurde, faßte man Bruchzahlen (positive rationale Zahlen) als Äquivalenzklassen von Paaren natürlicher Zahlen auf. Diese Idee schlug sich im Unterricht zunächst nur in der Unterscheidung von „formgleich“ und „wertgleich“ nieder. Unter dem Bedürfnis, Bruchrechnung und mathematische Theorie einander anzupassen, versuchte man wiederholt, Bruchrechnung im Unterricht an der Idee der Äquivälenzklassen zu orientieren. In einigen Fallen ging man sogar so weit, diesen Aspekt als den einzig wissenschaftlich vertretbaren darzustellen. (Das wurde natürlich dadurch begünstigt, daß die meisten systematischen Darstellungen der Theorie der rationalen Zahlen dieser Darstellung folgten.) So forderte z.B. der Lehrplan von 1963 für die DDR: „Bei der ‚Einführung in die Bruchrechnung‘ steht die sorgfältige und wissenschaftlich einwandfreie Erweiterung des Zahlbegriffs im Vordergrund“. „Wissenschaftlich einwandfrei“ bedeutet dabei die Zahlbereichserweiterung mit Hilfe von Äquivalenzklassen von Paaren als autonomer Hintergrundtheorie. Auch in der Bundesrepublik gab es immer wieder Versuche, Lehrgänge an dieser autonomen Hintergrundtheorie zu orientieren (z.B. FREUND 1965/66); jedoch haben sich diese Versuche nicht durchsetzen können.

Eine völlig neue Situation ergab sich, als man die Fragestellung umkehrte und nun versuchte, mathematische Verfahren zu entwickeln, die stärker an die Unterrichtspraxis angelehnt waren. Man suchte also nach einer geeigneten heteronomen Hintergrundtheorie. Diese Bemühungen sollten „vor allem zur Klärung der im Bereich der Bruchrechnung noch strittigen didaktisch-methodischen Probleme beitragen“ (GRIESEL 1968). Zweifellos ist z.B. durch die Entwicklung des Operatorkonzepts (BRAUNFELD 1968, DIENES 1968, GRIESEL 1968, PICKERT 1968) die didaktische Diskussion um die Bruchrechnung befruchtet worden, und es wurden viele neue Ideen entwickelt. Zugleich zeigte sich jedoch die Tendenz, diese Hintergrundtheorie als endgültige Lösung der didaktischen Probleme der Bruchrechnung zu betrachten. Davon klingt etwas an, wenn GRIESEL seine Arbeit zur Fundierung der Bruchrechnung mit Opera-

toren betitelte: „Der wissenschaftliche Hintergrund der Bruchrechnung“, oder wenn er 1975 an anderer Stelle als Erfolg der didaktischen Analyse berichtet, „daß heute in nahezu allen Lehrgängen die Bruchrechnung auf der Grundlage von Operatoren eingeführt wird“.

In der didaktischen Diskussion zeigte sich schließlich die Tendenz, didaktische Fragen der Unterrichtssequenz primär von der Hintergrundtheorie her zu entscheiden. So galt es lange als zwingend, daß in einem Operator-orientierten Lehrgang die Multiplikation vor der Addition behandelt werden müsse. Es ist bezeichnend, daß erst eine neue theoretische Variante eines Zuganges zu den Bruchzahlen entwickelt werden mußte, in der es trotz Verwendung von Operatoren sinnvoll ist, die Addition vor der Multiplikation zu behandeln, um eine solche Reihenfolge auch für Unterrichtssequenzen zu legitimieren (KIRSCH 1975).

Bei der Bewertung von Lehrgängen führt der enge Bezug auf eine Hintergrundtheorie insbesondere leicht zur Forderung nach „Methodenreinheit“. Das wird verstärkt durch die Innovationsstrategie, eine neue didaktische Idee zunächst mit der Entwicklung einer geeigneten Hintergrundtheorie zu legitimieren, in einem Unterrichtswerk zu konkretisieren, dann in Lehrerfortbildungsveranstaltungen und Handbüchern für die Fortbildung von Lehrer zu propagieren und schließlich durch Richtlinien verordnen zu lassen. Bei dem Bemühen um Breitenwirkung müssen dann notwendigerweise Verkürzungen der Argumentation auftreten. So hat man bei der Neuorientierung der Bruchrechnung zu ausschließlich auf das Operatorkonzept gesetzt. Heute muß man wohl sagen, daß sich die methodenreinen Operator-Lehrgänge nicht bewährt haben. Die langen Vorbereitungen im Rechnen mit Operatoren vor der eigentlichen Bruchrechnung, die aufwendigen Operatorketten, schließlich das ausufernde, für den Laien kaum verständliche „Operator-Chinesisch“ und die von den Anwendungen her unnatürliche Reihenfolge der Rechenoperationen mit der im Hinblick auf Anwendungen zu starken Betonung der Multiplikation sind auf Kritik gestoßen.

Inzwischen ist eine große Zahl weiterer möglicher systematischer Zugänge zu den Bruchzahlen entwickelt worden, die unterschiedliche, in der Praxis auftretende Aspekte des Zahlbegriffs betonen (KIRSCH 1970). Auf dieser Grundlage hat sich heute weitgehend Konsens eingestellt, daß es sinnvoll ist, die verschiedenen Aspekte der Bruchzahlen im Unterricht anzusprechen (PADBERG 1978). Die neuen Unterrichtswerke tragen dieser Entwicklung Rechnung (z.B. *Gamma* 6, 1977); auch die Neubearbeitung von *Mathematik heute* (6, 1978). In ihnen verbindet man das Operatorkonzept mit dem Größenkonzept, so daß einerseits die Modelle der traditionellen Bruchrechnung insbesondere beim Vergleich, bei der Addition und bei der Subtraktion benutzt werden, während man sich bei der Einführung der Multiplikation und Division besonders auf die Vorteile der Operatoren stützt. Man darf allerdings nicht verkennen, daß gerade durch die konsequenten Operatorlehrgänge Vorteile und Schwächen des Operatorkonzepts besonders deutlich hervorgetreten sind, so daß sich die neuen Lehrgänge auf diese Erfahrungen stützen konnten.

Die rasche Anpassung an diese Entwicklung wird jedoch erschwert, wenn Richtlinien ausschließlich am Operatorkonzept orientiert sind. So kritisiert FREUDENTHAL an den Hessischen Rahmenrichtlinien das Konzept der Bruchrechnung: „Es wird nicht etwa das Bruchrechnen schlechtweg zum Ziel gesetzt, sondern das Bruchrechnen nach einer bestimmten – kontroversen und meiner Meinung nach schlechten – Didaktik. Der Schüler muß außer den Brüchen auch noch das Reiten auf den eingebauten Steckenpferden der Verfasser lernen.“ (FREUDENTHAL 1978, S. 113).

Im Bereich der *Geometrie* zeigt sich die Wirkung von Hintergrundtheorien wesentlich einschneidender, weil sie sich hier in der Regel auf den ganzen Lehrgang beziehen. Hier besteht die Gefahr, daß die Sequentierung des Lehrganges der Hintergrundtheorie folgt. Freilich wird dies meist nicht deutlich, weil die Hintergrundtheorie selten veröffentlicht wird. Gelegentlich ist das jedoch der Fall. So findet sich z.B. die Hintergrundtheorie des Geometrielehrganges von *Mathematik heute* in: G. HOLLAND, *Geometrie für Lehrer und Studenten*, Band 1, 2. Vergleicht man Hintergrundtheorie und Lehrgang, so

wird deutlich, daß die Unterichtssequenz an entscheidenden Stellen der Hintergrundtheorie folgt. So entspricht z.B. im Schulbuch für Klasse 5 die Reihenfolge der Abschnitte über Punkte und Geraden, Figuren als Punktmengen der Ebene, Streckenzüge und Vielecke zu Beginn des Lehrganges mit dem Aufbau der Hintergrundtheorie weitgehend überein, allerdings mit den von BECKER angegebenen Arten von Lücken. Es ist bemerkenswert, daß dieses Buch gerade in der propädeutischen Phase, in der man am ehesten eine nicht fachsystematische Darstellung erwarten würde, der Hintergrundtheorie folgt. (Dabei ist es natürlich möglich, daß die Hintergrundtheorie besonders gut mit den Zielen der Propädeutik in diesem Lehrgang verträglich ist.)

Allgemein scheinen die unerschöpflichen Möglichkeiten, Elementargeometrie axiomatisch aufzubauen, den Blick dafür zu trüben, daß es auch andere als fachsystematische Aufbauprinzipien für einen Geometrielehrgang geben kann.

Ein weiterer Effekt, der durch den Bezug auf eine Hintergrundtheorie zumindest gefördert wird, ist die Tendenz zur Linearisierung von Unterrichtssequenzen. So herrschen in den Lehrbüchern für das Gymnasium im Geometrieunterricht Sequentierungen vor, bei denen z.B. nacheinander die verschiedenen Kongruenzabbildungen getrennt in den einzelnen Jahrgangsbänden behandelt werden, z.B.

Klasse 5:	Achsenspiegelungen Achsensymmetrie,
Klasse 6:	Drehungen – Halbdrehungen – drehsymmetrische Figuren – punktsymmetrische Figuren,
Klasse 7:	Verschiebungen.

Orientiert man sich dagegen z.B. am Spiralprinzip von BRUNER, so können auf jeder Klassenstufe die wichtigsten Kongruenzabbildungstypen zusammen auf unterschiedlichen Niveaus betrachtet werden, (dies ist z.B. die Konzeption von *Gamma*)

Klasse 5: Untersuchen von Figuren auf Symmetrie (Achsensymmetrie, Drehsymmetrie, Verschiebungssymmetrie)

Klasse 6: Betrachtung geometrischer Abbildungen als Bewegungen von Figuren (Achsenspiegelungen, Drehungen und Verschiebungen)

Klasse 7: Auffassen geometrischer Abbildungen als Abbildungen der Ebene (Achsenspiegelungen, Drehungen und Verschiebungen)

Die einzelnen Stufen unterscheiden sich deutlich hinsichtlich der Entwicklung des Abbildungsbegriffs. Bei einem solchen Aufbau fällt es schwer, eine axiomatisch aufgebaute Hintergrundtheorie anzugeben, die dieser Sequentierung entspricht.

Die Beispiele machen deutlich, daß zumindest im Gymnasium die Tendenz besteht, unter dem Einfluß von Hintergrundtheorien in den mathematischen Unterrichtssequenzen die Betrachtungen auf passende Aspekte einzuschränken, bei der Anordnung der Inhalte der Systematik der Hintergrundtheorie zu folgen und schließlich Lehrgänge als optimal zu empfinden, die einer didaktisch orientierten Hintergrundtheorie entsprechen. Pädagogische Gesichtspunkte kommen dann häufig zu kurz. Damit kommt es in der didaktischen Diskussion leicht zu einer Polarisierung, bei der es den Anschein hat, als müsse man sich bei der Lehrgangsentwicklung zwischen pädagogischen Prinzipien und mathematischer Theorie entscheiden. Eine wesentliche Ursache dafür sehe ich in der relativ stark verengten Verwendung des Begriffs Hintergrundtheorie.

3. Erweiterter Begriff der Hintergrundtheorie

Der Begriff der Hintergrundtheorie geht meist aus von der Vorstellung eines axiomatischen Aufbaus eines bestimmten Bereiches von Begriffen und Aussagen über diese Begriffe, bei dem bestimmte Methoden verwendet werden,

etwa im Sinne von HILBERTS Theorie der Raumgeometrie in seinen *Grundlagen der Geometrie* oder DEDEKINDS Theorie der natürlichen Zahlen in *Was sind und was sollen die Zahlen?*

Spricht man dagegen von Funktionen*theorie*, Gruppen*theorie*, Zahlen*theorie*, so meint man nicht den von einem bestimmten Autor entwickelten Aufbau dieser Gebiete, sondern den ganzen Themenkreis mit seinen Begriffen, Aussagen, inneren Zusammenhängen und Methoden. Faßt man Hintergrundtheorie in diesem weiteren Sinne auf, so löst sich die Spannung zwischen mathematisch Notwendigem und pädagogisch Sinnvollem auf. Denn nun wird es gerade mit Berufung auf eine Hintergrundtheorie notwendig, z.B. die unterschiedlichen Aspekte von Bruchzahlen im Unterricht zu behandeln, oder in der Geometrie sich nicht notwendig auf eine Axiomatik festzulegen, sondern gerade die verschiedenen Möglichkeiten eines axiomatischen Aufbaus der Geometrie zu betrachten, und es wird dann auch möglich, geometrische Themenkreise z.B. im Sinne von LIETZMANN und WAGENSCHEIN netzförmig zu erschließen, um so die inneren Zusammenhänge deutlich zu machen.

Auch die didaktische Sachanalyse erhält unter diesem Gesichtspunkt eine neue Dimension. Theoretische Überlegungen, die von didaktischen Fragestellungen ausgehen, können nun zur Theoriebildung beitragen. Sie sind dann ebenso wie innermathematische Untersuchungen ein belebendes Element, das für die dynamische Entwicklung einer mathematischen Theorie sorgt. Das hat natürlich umgekehrt für den Unterricht zur Folge, daß diese innere Dynamik der Hintergrundtheorie zu einer Dynamik des Mathematikunterrichts führt, in der sich die Entwicklung der Mathematik widerspiegelt. Unter dieser Sicht von Hintergrundtheorie kann es auch für einen problemorientierten Lehrgang eine Hintergrundtheorie geben.

Im folgenden soll also unter der mathematischen Hintergrundtheorie einer Unterrichtssequenz oder eines Lehrganges der dieser Unterrichtssequenz oder diesem Lehrgang zugrundeliegende mathematische Gegenstandsbereich mit seinen Begriffen, Aussagen, inneren Zusammenhängen, Methoden und Dar-

stellungsmöglichkeiten verstanden werden. Meint man dagegen Hintergrundtheorie im engeren Sinn, so wäre es zweckmäßiger, von einem bestimmten axiomatischen Aufbau dieser Theorie zu sprechen.

Bei der Lehrgangsentwicklung wird zunächst meist die Hintergrundtheorie didaktisch bewertet, wenn man z.B. die Fragen stellt: Handelt es sich um ein Gebiet, das für die Schüler wichtig ist? Welche Art des Aufbaus dieser Theorie ist für die Schüler am besten geeignet? Welche Ergebnisse der Theorie sind für die Schüler am wichtigsten? Liegen die Anwendungsmöglichkeiten der Theorie im Interessenbereich der Schüler? Lassen sich an dieser Theorie wichtige Ziele des Mathematikunterrichts verwirklichen?

Umgekehrt ist es aber von der Hintergrundtheorie her möglich, didaktische Entscheidungen zu begründen und Unterrichtssequenzen zu bewerten.

Kann bei dem eingeengten Begriff der Hintergrundtheorie zur Bewertung eines Lehrganges oder einer Unterrichtssequenz im wesentlichen nur entschieden werden, ob Verträglichkeit vorliegt, so eröffnen sich bei dem erweiterten Begriff der Hintergrundtheorie neue Möglichkeiten.

4. Die Rolle einer Hintergrundtheorie bei der Bewertung einer Unterrichtssequenz

Wenn im folgenden gezeigt wird, wie von der Hintergrundtheorie her didaktische Entscheidungen beeinflußt werden können, so soll damit keineswegs der Eindruck erweckt werden, ihr käme im didaktischen Entscheidungsprozeß die Hauptrolle zu. Es soll lediglich deutlich gemacht werden, daß der erweiterte Begriff der Hintergrundtheorie auch bei pädagogischer Priorität für die didaktische Entscheidung tragfähiger ist als der eingeengte. An einigen Beispielen will ich zeigen, in welchen Bereichen Entscheidungshilfen geliefert werden können.

Auswahl von Inhalten: Bei der Entscheidung, ob ein bestimmter Themen-

bereich im Unterricht behandelt werden soll, spielt die Wertung der Hintergrundtheorie eine wichtige Rolle. So kann z.B. aus dem Gewicht der Hintergrundtheorie geurteilt werden, daß es ein Unding wäre, Analysis und Boolesche Algebra als Wahlangebot miteinander konkurrieren zu lassen.

Von der Hintergrundtheorie her muß auch entschieden werden, ob Elementarisierungen möglich sind, die die Substanz der Theorie erhalten. So wird es kaum möglich sein, mit Kenntnissen der Analysis und analytischen Geometrie in der Kollegstufe sinnvoll Differentialgeometrie zu treiben. Auch die Bemühungen, Topologie in der Kollegstufe in Verbindung mit der Analysis zu behandeln, können kaum befriedigen, weil die elementar zugänglichen Sätze und Begriffe kaum das Erfassen zentraler Sachverhalte ermöglichen. Es ist für viele Mathematiker ein rotes Tuch, wenn versucht wird, Mengenlehre in der Schule zu unterrichten, weil sie wissen, daß hier allenfalls die trivialen Bereiche dieser Theorie vermittelt werden können.

Innerhalb einer Theorie gibt es grundlegende Begriffe, Schlüsselbegriffe, zentrale Sätze, besonders tragfähige Verfahren. Wenn es darum geht, für eine Unterrichtssequenz Entscheidungen der Stoffauswahl zu treffen, so können solche Wertungen eine wichtige Rolle spielen. KIRSCH spricht hier von „Vereinfachung durch Konzentration auf den Kern der Sache“ (1977). So wird man in einem Leistungskurs Analysis kaum auf den Mittelwertsatz verzichten, andererseits läßt sich vertreten, daß man den Folgenbegriff nicht behandelt. Dabei wird von der Hintergrundtheorie her deutlich, daß sich durch die Auswahl bestimmter Begriffe unter Umständen auf Grund innerer Zusammenhänge Gewichte verlagern. So führt z.B. der Verzicht auf den Konvergenzbegriff in der Analysis dazu, daß der Begriff der Stetigkeit an Gewicht gewinnt. Hieran wird besonders deutlich, daß sich der Begriff Hintergrundtheorie nicht auf eine bestimmte Systematik beziehen sollte, sondern daß man gerade die möglichen verschiedenen Systematiken im Auge haben sollte.

Anordnung der Inhalte: Auch Fragen der Anordnung der Inhalte können von der Hintergrundtheorie her beeinflußt werden. Sprechen didaktische Argumen-

te gegen eine systematische Darstellung, (was nicht notwendig der Fall sein muß: WITTMANN 1974, S.115), so wird man trotzdem von der Hintergrundtheorie her die Zusammenhänge zu erkennen suchen, die man im Unterricht benutzen kann. So kann z.B. die Satzgruppe des PYTHAGORAS nach dem Vorschlag von WAGENSCHEIN (400 ff.) nur geplant werden, wenn man die Abhängigkeiten und Anwendungsmöglichkeiten überblickt.

Bei der Einführung von Begriffen muß beachtet werden, welche Begriffe bei den Definitionen vorausgesetzt werden; beim Beweis von Sätzen stützt man sich auf andere Sätze (oder Axiome). Diese Zusammenhänge scheinen auf eine Linearisierung der Anordnung zu drängen. Doch kann gerade von der Hintergrundtheorie her deutlich werden, daß unterschiedliche Definitionen möglich sind, daß auch bei den Sätzen verschiedene Hilfssätze zu unterschiedlichen Beweisen führen können. Solche Einsichten können zu einer fachlichen fundierten Offenheit führen, bei der den Schülern Spielraum zu eigenen Lösungen geboten wird.

Akzentuierungen: Ein wichtiges didaktisches Mittel bei der Unterrichtsplanung ist die Akzentuierung innerhalb einer Unterrichtssequenz, etwa die Betonung der Abbildungen in der Geometrie, die Betonung des Funktionsaspekts in der Trigonometrie, die Betonung des geometrischen Aspekts in linearer Algebra usw. Diese Entscheidungen können kontrolliert werden, indem man untersucht, ob sich in der Hintergrundtheorie solche Aspekte als tragfähige Ansätze erweisen.

Vereinfachungen: Innerhalb des Unterrichts wird man häufig aus didaktischen Gründen vereinfachen. Mit Hilfe der Hintergrundtheorie läßt sich dann entscheiden, ob eine Vereinfachung akzeptabel ist oder eine Verfälschung darstellt (KIRSCH 1977; WITTMANN 1974, S. 11).

Anwendungen: Für den Mathematikunterricht spielen schließlich Umweltsituationen, Problemfelder und Anwendungsbereiche eine wichtige Rolle. In vielen Fällen besitzt eine mathematische Theorie unmittelbar Anwendungen, ja häufig ist sie im Hinblick auf Anwendungsmöglichkeiten entwickelt worden. Hier

wird der Mathematikunterricht das Beziehungsgefüge zwischen mathematischer Theorie und Anwendungen reflektieren und bei didaktischen Entscheidungen berücksichtigen können.

Andererseits gibt es tradierte Gebiete des Mathematikunterrichts, die sich nur schwer klassischen mathematischen Theorien zuordnen lassen. Man denke etwa an den Bereich des Sachrechnens. Hier gehen Methoden der Arithmetik, der Größenbereiche und der elementaren Funktionen ein. Dabei hat es sich als nützlich erwiesen, dem Themenbereich mit seinen didaktischen Zielsetzungen eine Hintergrundtheorie zuzuweisen, die aus didaktischen Bedürfnissen entwikkelt worden ist und mit tieferliegenden, gewichtigeren mathematischen Theorien korrespondiert. So sind einerseits die dem Sachrechnen zugrundeliegenden Größenbereiche analysiert worden (KIRSCH 1969), andererseits hat man den Funktionsbegriff als Leitbegriff gewählt, mit dem man die wichtigsten Situationen mit ihren Problemstellungen adäquat beschreiben kann (KIRSCH 1969, 1970; VOLLRATH 1973). Es ist dabei so etwas entstanden wie eine „Theorie der elementaren Funktionen auf Größenbereichen“, von der aus nun Fragen der Zielsetzung, der Sequentierung, der Auswahl des Aufgabenmaterials und der zu behandelnden Funktionstypen entschieden werden können.

Ähnlich lassen sich auch die Entwicklungen zur Bruchrechnung deuten. Es wurde bereits in der traditionellen Hauptschuldidaktik gesehen, daß eine lebensnahe Bruchrechnung Redewendungen wie „die Hälfte von“ adäquat wiedergeben muß. Man erkannte, daß dies mit Hilfe von Operatoren möglich ist *(Oehl* 1965). Auf dieser Grundlage wurden dann die oben genannten Operatorzugänge zu den Bruchzahlen entwickelt und bereicherten damit die Arithmetik.

Aus diesen Beispielen wird deutlich, daß mit Hilfe der Hintergrundtheorien Argumente für didaktische Überlegungen gewonnen werden können. Auch die Erweiterung des Begriffs der Hintergrundtheorie beseitigt nicht die Komplexität des didaktischen Entscheidungsprozesses. Sie löst jedoch weitgehend die Spannungen zwischen mathematischen und pädagogischen Entscheidungen

auf.

5. Die Rolle psychologischer Theorien bei der Unterrichtsplanung

War es einerseits sinnvoll, den Begriff der Hintergrundtheorie zu erweitern, so erscheint es mir andererseits notwendig, ihn gegenüber dem Vorrat von Theorien aus dem psychologischen Bereich abzugrenzen, die bei der Planung von Unterricht von Bedeutung sind.

Im Mathematikunterricht werden *Lernprozesse* geplant, für die in der Psychologie Theorien entwickelt worden sind: Es werden Begriffe gelehrt, Regeln vermittelt, Strategien zum Lösen von Problemen erarbeitet, Aussagen begründet. Anders als bei mathematischen Hintergrundtheorien, bei denen sich die didaktischen Untersuchungen primär auf den zu vermittelnden Gegenstandsbereich beziehen, haben psychologische Theorien Bedeutung für den Vermittlungsprozeß. Sie stellen mehr einen Vorrat von Theorien dar, von denen man Anwendbarkeit auf didaktische Problemstellungen erhoffen kann.

Mag man vielleicht bedauern, daß von der Psychologie bisher keine einheitliche Theorie des Mathematiklernens angeboten werden kann, so muß man andererseits sehen, daß gerade das Konkurrieren verschiedener Lerntheorien einer Dogmatisierung in der Didaktik entgegenwirkt.

> „Während früher häufiger dogmatische Festlegungen auf eine psychologische Grundposition anzutreffen waren, von der aus man schlecht und recht alles zu erklären und den Vertreter der anderen Richtung abzuqualifizieren versuchte, macht sich heute stärker ein gewisser Pragmatismus breit und im Gefolge damit ein gewisser Eklektizismus in der Anwendung der Psychologie“ (GRIESEL 1975).

Dies zeigt sich insbesondere an den neueren Werken zur Grundlegung des Mathematikunterrichts (WITTMANN 1974, ZECH 1977). Hier werden psychologische Theorien für die Planung des Mathematikunterrichts erschlossen. ohne

daß man ihnen unkritisch folgt. Freilich muß es sich erst im Laufe der Zeit erweisen, ob diese Theorien wirklich tragfähig für den Mathematikunterricht sind.

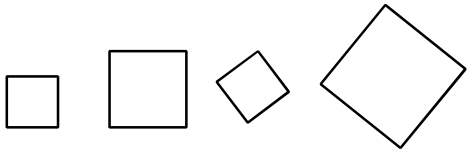
Neben den umfassenden Theorien des Lernens gibt es inzwischen einen großen Vorrat empirischer Arbeiten zu Fragen des Lernens, auch zu Fragen des Mathematiklernens, die als Basis psychologischer Theoriebildung betrachtet werden können. Bei ihnen liegt ein besonderer Reiz für den Didaktiker, weil es sich um empirisch gesicherte Befunde handelt. Am Beispiel des Begriffslernens möchte ich auf einige Probleme hinweisen, die sich bei der Bemühung um didaktische Anwendung solcher Ergebnisse ergeben.

Von CLARK (1971) wurden 250 empirische Arbeiten zum Begriffslernen darauf untersucht, welche Folgerungen man aus ihnen für das Lehren von Begriffen ziehen kann. Als konkretes Beispiel gibt er die Entwicklung einer Unterrichtseinheit zum Lehren des Begriffs „Quadrat“ für Vorschulkinder. Dabei soll der Begriff allein durch Beispiele und Gegenbeispiele vermittelt werden.

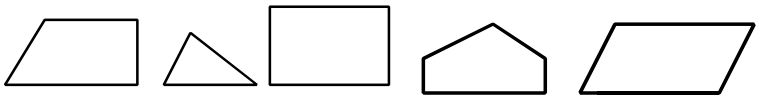
Da man ein Quadrat definieren kann als ein Viereck, bei dem alle Seiten gleich lang *und* alle Winkel rechte sind, handelt es sich um einen *konjunktiven* Begriff. Man hat herausgefunden, daß konjunktive Begriffe leichter angeeignet werden als z.B. disjunktive.

Die Eigenschaften „alle Seiten sind gleich lang“, „alle Winkel sind rechte“ sind relevante Eigenschaften (“critical properties“). Dagegen sind die Lage des Quadrats in der Ebene oder sein Flächeninhalt irrelevante Eigenschaften ("non-critical properties“). Man hat gefunden, daß ein Begriff umso leichter gelernt wird, je auffälliger relevante Eigenschaften und je unauffälliger irrelevante Eigenschaften werden.

Figuren wie



stellen *Beispiele* (“positive instances“), dagegen stellen die Figuren



Gegenbeispiele dar (“negative instances“). Es hat sich bei konjunktiven Begriffen als günstiger erwiesen, mit Beispielen zu beginnen, als mit Gegenbeispielen.

Das Lernen eines Begriffs wird erleichtert, wenn die Probanden bei Beispielen und Gegenbeispielen jeweils auf die relevanten und irrelevanten Eigenschaften hingewiesen werden.

Aus solchen Ergebnissen werden dann folgende Folgerungen für den Unterricht gezogen:

Einführungsphase:

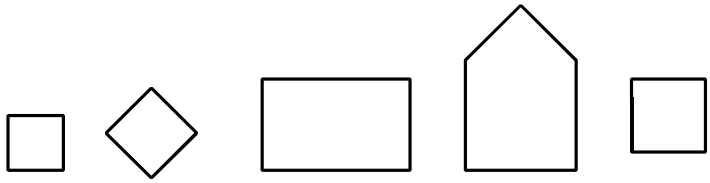
1. Papierquadrate aus weißem Papier werden auf eine Flanelltafel geheftet und als Einführungsbeispiele präsentiert. Jedes wird als „Quadrat“ bezeichnet.

2. Die Lehrerin kommentiert: „Sieh, dies Quadrat hat 4 Seiten“ (Die Lehrerin zählt die Seiten). „Die Seiten des Quadrats sind gleich lang“ (Die Lehrerin mißt jede Seite mit einer Karte). „Das Quadrat hat an jeder Ecke einen rechten

Winkel“ (Sie paßt die Karte in jede Ecke des Quadrats ein). So wird bei jedem Beispiel der Einführungsphase verfahren.

Sicherungsphase:

1. Beispiele und Gegenbeispiele werden dargeboten:



Die Lehrerin zeigt auf jedes Beispiel und sagt: Benutzt eure Karte und sagt mir, ob es sich um ein Quadrat handelt! „Was muß es haben, um ein Quadrat zu sein?“

2. Bei jedem Beispiel gibt die Lehrerin nach jeder Antwort eine Rückmeldung, z.B. „Ja, du hast recht; das ist ein Quadrat, obwohl es gekippt ist, denn es hat...“ Oder: „Ich glaube nicht, daß es ein Quadrat ist, denn die Seiten sind nicht alle gleich lang. Miß es doch noch mal. Haben alle Seiten die gleiche Länge?“

3. Die Lehrerin läßt dem Schüler reichlich Zeit, die Beispiele zu betrachten, nachdem sie auf seine Antwort reagiert hat und ehe sie zum nächsten Beispiel übergeht. usw.

Das Beispiel zeigt in erschreckender Weise, wie stark das dem Lehrer empfohlene Handlungsmuster am Laborversuch orientiert ist. Innerhalb dieses Handlungsmusters mag vielleicht eine optimale Vorgehensweise gefunden worden sein.

Offensichtlich tritt aber durch den Glauben an empirische Versuchsergebnisse eine derartige Verengung der Sichtweise ein, daß pädagogische Gesichtspunkte völlig außer acht gelassen werden. Ob die Schüler die notwendigen Vorkennt-

nisse und Fähigkeiten besitzen (Viereck, Seite, Winkel, Ecke, gleiche Länge, rechter Winkel, Strecken vergleichen, rechte Winkel erkennen) wird überhaupt nicht in Betracht gezogen. Daß es für die Begriffsbildung wichtig ist, daß der Schüler motiviert wird, wird ebenfalls außer acht gelassen.

Schließlich orientiert sich die Interaktion zwischen Lehrer und Schüler am Muster des erklärenden Unterrichts, ohne daß diskutiert wird, ob das in dieser Altersstufe überhaupt eine sinnvolle Unterrichtsform ist. Es ist schlichtweg eine Irreführung des Lehrers, wenn behauptet wird, aus den psychologischen Forschungsergebnissen würde sich ein derartiges Vorgehen ableiten lassen.

Forschungsarbeiten des beschriebenen Typs sind im Grunde für die Unterrichtsplanung weitgehend belanglos, wenn ihnen ein stark verengtes Begriffsverständnis zugrunde liegt. Häufig werden nämlich im wesentlichen nur Eigenschafts- und Relationsbegriffe gesehen. Bei den Eigenschaftsbegriffen wird nach der logischen Struktur der definierenden Eigenschaften klassifiziert. Anscheinend wird nicht gesehen, daß man prinzipiell logisch äquivalente Definitionen anderer logischer Struktur angeben kann. Bei den meisten mathematischen Begriffen lassen sich relevante und irrelevante Eigenschaften nicht so deutlich angeben, wie das in den einfachen Beispielen angedeutet wird. Schließlich zeigt es sich, daß die Untersuchungen für den Unterricht verwertbare Ergebnisse erst dort bringen, wo in diesen Untersuchungen die Wirksamkeit verschiedener Lehrstrategien betrachtet wird. Die Art der dabei benutzten Strategien ist aber (wohl aus Gründen der Durchführbarkeit im Labor) erheblich eingeschränkt. Sie entsprechen keineswegs dem Aktionspotential des guten Lehrers. Indem die Untersuchungen aber die Lehrmethoden auf einfache alternative Verhaltensweisen reduzieren, bei denen dann eine Methode signifikant bessere Ergebnisse liefert, wird leicht suggeriert, man hätte die wirksamste Methode gefunden. Solche Untersuchungen mögen vielleicht für den Unterricht per Computer verwendbar sein, für den praktischen Unterricht des Lehrers sind sie irrelevant.

Die stärksten Bedenken sind jedoch gegen die diesen Untersuchungen zu-

grundeliegenden Vorstellungen über das Lernen von Begriffen zu erheben. Einmal reduzieren sie das Lernen fast ausschließlich auf das Lernen über Beispiele und Gegenbeispiele, zum anderen isolieren sie weitgehend das Begriffslernen von den anderen Typen des Lernens.

Solche Ansätze können dogmatisch wirken, wenn sie ohne Einschränkungen in der Mathematikdidaktik übernommen werden, etwa in der Form: „Neue Begriffe höherer Ordnung lassen sich nicht durch Definitionen lernen, sondern allein (bewußt oder unbewußt) durch Klassifizieren geeigneter Beispiele“. (VAN DORMOLEN 1978, S.57).

Im Hinblick auf eine Strukturierung von Lernprozessen, die im Mathematikunterricht in Gang gesetzt werden sollen, ist es sinnvoll, durch Akzentuierungen bestimmte Phasen zu unterscheiden. Es hätte jedoch schlimme Folgen, wenn man dabei aus dem Auge verlieren würde, daß Begriffslernen natürlich auch mit Regellernen und Problemlösen zu tun hat. Man muß also darauf achten, daß in der didaktischen Theoriebildung diese isolierende Betrachtung durch übergreifende Überlegungen ausbalanciert wird, damit der Unterricht nicht in unverbundene Teile zerfällt (Heute wird der Begriff eingeführt, in der nächsten Stunde wird er angewendet, dann werden mit ihm Probleme gelöst!)

Sowohl psychologische Befunde als auch psychologische Theorien bedürfen also einer kritischen Überprüfung auf Anwendbarkeit für eine Theorie des Mathematikunterrichts.

Unterrichtserfahrungen können dann die Anwendung solcher Theorien rechtfertigen.

Das sollte möglichst auf der Grundlage systematischer Unterrichtsversuche geschehen.

Literatur

Athen, H., Griesel, H. (Hrsg.): Mathematik heute 6. Hannover: 1978.

Becker, G.: Über Hintergrundtheorien geometrischer Schulkurse. BMU (1977), 32-35.

Braunfeld, P.: Ein neuer Zugang zur Bruchrechnung vom Standpunkt der Operatoren, BMU 1968. 209-217.

Clark, D.C.: Teaching concepts in the classroom: A set of teaching prescriptions derived from experimental research. J. Ed. Ps. 62 (1971), 253-278.

Dienes, Z.P.: Bruchrechnen. Freiburg: 1968.

van Dormolen,J: Didaktik der Mathematik. Braunschweig: 1978.

Freudenthal,H.:Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht. München: 1978.

Freund,H.: Einführung der ganzen Zahlen und der Brüche im Sinne der modernen Algebra. MNU 18 (1965/66), 401-405.

Griesel, H.: Eine Analyse und Neubegründung der Bruchrechnung, MPSB 15 (1968), 48-68.

Griesel, H.: Stand und Tendenzen der Fachdidaktik in der Bundesrepublik Deutschland, Z.f. Päd. 21(1975), 19-31.

Hayen, J., Vollrath, H.-J., Weidig, L (Hrsg.): GAMMA 6. Stuttgart: 1977.

Holland, G.: Geometrie für Lehrer und Studenten. Band 1, 2. Hannover: 1974.

Kirsch, A.: Eine Analyse der sogenannten Schlußrechnung. MPSB 16 (1969), 41-55.

Kirsch, A.: Elementare Zahlen- und Größenbereiche. Göttingen: 1970.

Kirsch, A.: Gehört die Multiplikation vor die Addition? MU 21 Heft 1(1975), 7-18.

Kirsch, A.: Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht. DdM 5 (1977), 87-101.

Lietzmann, W.: Der Pythagoreische Lehrsatz. Leipzig: 1965.

Oehl, W.: Der Rechenunterricht in der Hauptschule. Hannover: 1965.

Padberg, F.: Didaktik der Bruchrechnung. Freiburg: 1978.

Pickert, G.: Die Bruchrechnung als Operieren mit Abbildungen. MPSB 15 (1968), 31-47.

Vollrath, H.-J.: Ware-Preis-Relationen im Unterricht. MU 19 Heft 6 (1973), 58-76.

Wagenschein, M.: Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken I. Stuttgart: 1970^2.

Wittmann, E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig: 1974.

Zech, F.: Grundkurs Mathematikdidaktik. Weinheim: 1977.