28. Klassifikationen nach Ähnlichkeit

Der Mathematikunterricht 24 Heft 2 (1978), 105-115

1. Sortieraufgaben

Im Mathematikunterricht der Grundschule läßt man Merkmalsklötze nach den vorhandenen Merkmalen wie Farbe, Form, Dicke oder Größe sortieren. Einen Satz Cuisenaire-Stäbe kann man nach Stäben gleicher Länge (Farbe) aufgliedern. Ähnlich lassen sich Flächen nach ihrem Flächeninhalt und Körper nach ihrem Volumen sortieren. Auch in der Orientierungsstufe werden gelegentlich Sortieraufgaben gestellt, etwa wenn man Vielecke nach ihrer Eckenzahl oder Winkel nach ihrer Größe einteilt. Freilich vollzieht sich dann der Sortiervorgang in der Regel nicht mehr an konkreten Gegenständen, sondern eher an Zeichnungen oder anderen symbolischen Objekten. Mit zunehmendem Alter verlagern sich diese Handlungen immer stärker in den Bereich der Vorstellungen, etwa wenn man von allen zueinander kongruenten Dreiecken spricht oder wenn man jeweils zueinander parallele Geraden zusammenfaßt.

Sortieraufgaben treten in drei Hauptformen auf:

a) Gegeben ist die zugrundeliegende Äquivalenzrelation, gesucht ist die Klasseneinteilung, z.B. Sortieren der Merkmalsklötze nach der Relation „ ...hat die gleiche Farbe wie ...“ oder Sortieren der Vielecke nach der Relation „ ... hat genau soviel Ecken wie ...“.

b) Gegeben ist die Klasseneinteilung, gesucht ist eine geeignete Relation. Man zerlegt z.B. den Satz der Merkmalsklötze in Klassen und fragt, welche Eigenschaft dieser Klasseneinteilung zugrunde liegt.

c) Gegeben ist lediglich die Grundmenge, gesucht sind sinnvolle Klasseneinteilungen. Man fragt etwa nach möglichen Typen von Dreiecken und erwartet Vorschläge zur Klassifikation.

Man verfolgt mit solchen Sortieraufgaben verschiedene Ziele.

a) Sortieraufgaben mit Vorgabe der Eigenschaft sollen z.B. dazu dienen, das Verständnis von Eigenschaften zu überprüfen. So kann man etwa die Kenntnis des Begriffs Seitenverhältnis untersuchen, indem man Rechtecke nach ihrem Seitenverhältnis sortieren läßt. Solche Sortieraufgaben können als wichtiges Instrument zur Beurteilung eines Begriffsbildungsprozesses dienen.

b) Wird bei einer Sortieraufgabe die Klasseneinteilung vorgegeben, so kann die Suche nach der zugrundeliegenden Relation einen Begriffsbildungsprozeß einleiten. Wenn man z.B. Vierecke in konvexe und nicht konvexe Vierecke einteilt, dann kann man damit zu einer Definition des Begriffs „konvexes Viereck“ führen. Dieser Typ von Aufgaben zielt auf das Entdekken von Eigenschaften. Bekanntlich können Eigenschaften auffällig werden, wenn man sie bei mehreren Objekten feststellt und bei anderen vermißt oder in anderer Ausprägung vorfindet. Da man in der Regel mehrere Eigenschaften angeben kann, mit deren Hilfe man die Klasseneinteilung beschreiben kann, handelt es sich hier um einen Aufgabentyp, der dem Schüler mehr Freiheit läßt.

c) Freie Sortieraufgaben werden benutzt, wenn man den Schüler selbst zu Klassifikationen anregen will, um Übersicht über einen größeren Objektbereich zu gewinnen. Insbesondere wird man sie verwenden, wenn man in der Sekundarstufe I den Zusammenhang zwischen Äquivalenzrelationen und Klasseneinteilungen herausarbeiten will.

Auch in der psychologischen Forschung werden häufig Sortieraufgaben verwendet. So ließ z.B. USNADZE (1929) nach vorgegebenem Muster sortieren, um festzustellen, ob die Probanden die relevanten Attribute finden konnten. Freie Sortieraufgaben wurden von GARDNER (1953) in seinen Forschungen über kognitive Stile im Kategorisierungsverhalten untersucht. Er ließ solche Objekte zusammenfassen, die zusammenzugehören schienen, und versuchte, das Verhalten der Probanden durch die Zahl der resultierenden Äquivalenz-

klassen zu messen.

Lösungen bei Sortieraufgaben erlauben also Rückschlüsse auf das Verständnis des Lösenden. Man kann jedoch auch davon ausgehen, daß das Denken des Lösenden vom Lösungsvorgang selbst beeinflußt wird.

2. Versuche mit Sortieraufgaben zum Ähnlichkeitsbegriff

In einer früheren Arbeit (VOLLRATH 1976) habe ich herauszuarbeiten versucht, daß der Ähnlichkeitsbegriff im umgangssprachlichen Verständnis einen sehr breiten Bedeutungsspielraum besitzt. Das läßt sich noch am ehesten mathematisch beschreiben, wenn man „ähnlich“ jeweils auf einen bestimmten Abbildungstyp bezieht.

Eine Figur F heiße ähnlich zu einer Figur F' bezüglich einer Abbildungsmenge A, wenn es eine Abbildung $f \in A$ gibt, derart daß $f(F) = F'$.

Wenn A bezüglich der Verkettung eine Gruppe ist, dann ist die so definierte Relation eine Äquivalenzrelation. Historisch ist diese Relation als „Verwandtschaft“ bezeichnet worden (MÖBIUS 1827), während man „Ähnlichkeit“ auf Ähnlichkeitsabbildungen (Verkettung von zentrischen Streckungen und Kongruenzabbildungen) beschränkt.

Im umgangssprachlichen Verständnis scheint jedoch „ähnlich“ allgemeiner im Sinne von „verwandt“ verstanden zu werden, wie einige Versuche mit Sortieraufgaben vermuten ließen (VOLLRATH 1976). Da die Ergebnisse auffällig waren, erschien es mir sinnvoll, die Versuche auf eine breitere empirische Basis zu stellen.

Dazu wurden 110 Probanden aus verschiedenen Schulen und Klassen Unterfrankens zufällig ausgewählt. Ihnen wurde mitgeteilt, daß sie an einer Untersuchung teilnehmen, in der es darum geht, festzustellen, wie Schüler eine Frage in einer Sortieraufgabe verstehen. In sechs Sortieraufgaben wurden ihnen nacheinander Sätze von Papierfiguren vorgelegt. Fünf Sätze waren aus weißem

Papier ausgeschnitten, ein Satz bestand aus Figuren, die aus kariertem Papier ausgeschnitten waren. In jedem Versuch wurden alle Figuren ungeordnet auf den Tisch gelegt.

Die Probanden wurden vom Versuchsleiter aufgefordert: „Lege alle ähnlichen Figuren auf einen Haufen!“ Es wurden keine weiteren Hilfen oder Kommentare gegeben. Der Versuchsleiter notierte das Ergebnis, sammelte das Material ein und gab die nächste Aufgabe. Die Reihenfolge der Aufgaben wurde immer beibehalten. Bei der Erhebung der Daten waren A. AMEND, A. HOCK, B. KELLNER und P. SCHMIDT, Studenten mit dem Wahlfach *Didaktik der Mathematik* an der Universität Würzburg, beteiligt. Der Versuch wurde von Herbst 1975 bis Herbst 1976 durchgeführt.

Von besonderem Interesse war es, ob die Probanden auf der Basis des umgangssprachlichen Ähnlichkeitsbegriffs Rechtecke im Sinne der mathematischen Ähnlichkeit sortieren. Da wir vermuteten, daß das Ergebnis wesentlich von der gewählten Grundmenge abhängt, variierten wir die Grundmenge entsprechend unseren Vorversuchen. Rechtecke standen im Vordergrund dieser Betrachtungen, weil mich interessierte, inwieweit das Seitenverhältnis als entscheidendes Merkmal gesehen wird.

3. Versuchsergebnisse

Bei jeder Aufgabe dominieren deutlich bestimmte Lösungen, durch die die Vorversuche weitgehend bestätigt werden.

In der ersten Aufgabe besteht die häufigste Lösung (Lösung 1) aus vier Klassen, von denen jede zwei Elemente enthält (Abb. 1). Sie trat mit einer relativen Häufigkeit von 27% auf. 26 % der Probanden entschieden sich für eine Lösung (Lösung 2), die eine Klasse mit den runden und eine Klasse mit den eckigen Figuren enthält. Daneben ergaben sich 16 weitere Lösungen, von denen jede höchstens 10% erreichte.

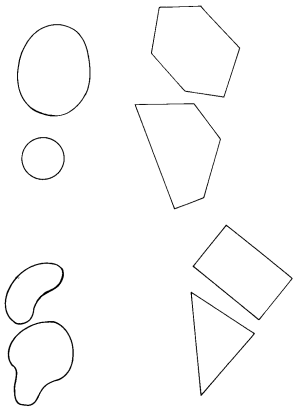


Abb. 1

Bei der zweiten Aufgabe dominierte mit 77% die Lösung von Abb. 2 (Lösung 1). Weitere 12 Lösungen hatten jeweils eine Häufigkeit von weniger als 10%.

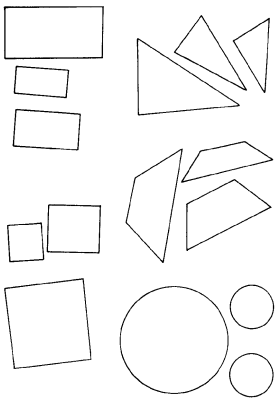


Abb. 2

In der dritten Aufgabe überwog die Lösung von Abb. 3 (Lösung 1), bei der in Rechtecke und Quadrate eingeteilt wurde, mit 66%. 14 weitere Lösungen erreichten weniger als je 13%.

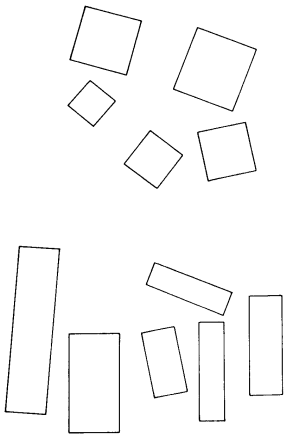


Abb. 3

In der vierten Aufgabe ergab sich mit 30% am häufigsten die Lösung von Abb. 4 (Lösung 1), daneben wurden von 26% der Probanden alle Rechtecke zusammengefaßt (Lösung 2). In 18 weiteren Lösungen wurden jeweils weniger als 10% erreicht.

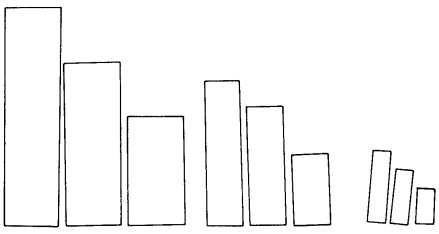


Abb. 4

In den beiden letzten Aufgaben dominierte die in Abb. 5 und 6 gezeigte Klasseneinteilung (Lösung 1) mit 51% bzw. 62%. 9 bzw. 10 weitere Lösungen erreichten jeweils weniger als 16% bzw. 17%.

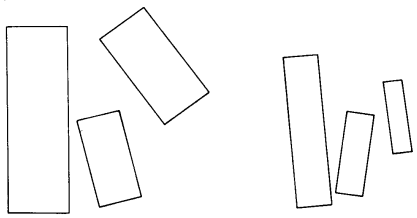


Abb. 5

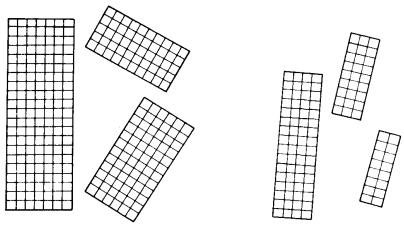


Abb. 6

4. Diskussion der Ergebnisse

Bei den beiden häufigsten Lösungen der ersten Aufgabe unterscheiden die Probanden zwischen „rund“ und „eckig“. Während sich die Lösung 2 auf diese Einteilung beschränkt (diese Lösung wurde in den Vorversuchen am häufigsten

angegeben), wird in der anderen Lösung noch feiner eingeteilt. Bei den runden Figuren wird in konvexe und nicht konvexe eingeteilt, bei den Vielecken werden Rechteck und Dreieck zusammengenommen. Diese etwas merkwürdige Einteilung der Vielecke könnte unter dem Gesichtspunkt vorgenommen worden sein, in bekannte und unbekannte Formen einzuteilen. Weitere Lösungen können Tabelle 13 im Anhang entnommen werden.

Die am häufigsten angegebene Lösung der zweiten Aufgabe scheint sich dadurch zu ergeben, daß nach besonders eindrucksvollen Figuren sortiert wird, für die besondere Namen üblich sind. Diese Lösung wurde auch in den Vorversuchen am häufigsten gegeben. Es ist auffällig, daß mögliche feinere Einteilungen zwischen den Rechtecken hier nicht auftreten, daß aber andererseits Rechtecke und Quadrate gesondert gelegt werden.

In der dritten Aufgabe dominiert wie in den Vorversuchen die Einteilung in Rechtecke und Quadrate, die auf weitere mögliche Einteilungen der Rechtecke verzichtet. Die besonders eindrucksvolle Gestalt der Quadrate scheint den Sortierprozeß so stark zu beeinflussen, daß die Probanden blind sind für feinere Einteilungen der Rechtecke. Relativ häufig (12 %) tritt eine Lösung auf, bei der die Rechtecke aufgeteilt werden in etwa gleich hohe und den Rest (s. Anhang Tabelle 3).

In der vierten Aufgabe dominiert wie in den Vorversuchen die Lösung, die die Rechtecke nach gleicher Breite sortiert. Daneben wird häufig auf eine Einteilung der Rechtecke verzichtet, d.h. für diese Probanden sind alle Rechtecke ähnlich. Sie sind offensichtlich an der Rechteckgestalt orientiert. Möglicherweise ist diese Lösung auch von den vorhergehenden beeinflußt worden.

In den beiden letzten Aufgaben könnte man die Rechtecke jeweils in drei Klassen zu je zwei einteilen, wenn man die Gleichheit des Seitenverhältnisses zugrunde legt. Es treten die Seitenverhältnisse 1:2, 1:3 und 1:4 auf. (Hier hatten wir die Versuchsanordnung gegenüber den Vorversuchen insofern geändert, als von jedem Seitenverhältnis nur zwei statt drei Rechtecke auftraten). Es gab innerhalb der gesamten Stichprobe keine Lösung, die das Sei-

tenverhältnis in Betracht zog. Die Quadrate auf dem Papier in der sechsten Aufgabe beeinflußten das Ergebnis offenbar nicht, obwohl sie zum Abzählen und Vergleichen der Seitenverhältnisse eine starke Hilfe hätten sein können. Auch die auffälligen Seitenverhältnisse waren als deutlicher Hinweis gedacht. Sie wurden jedoch nicht gesehen. Statt dessen dominierten Lösungen, die nach einer Vorstellung von „Größe“ sortierten. Bei diesen beiden Aufgaben wurden die Ergebnisse der Vorversuche im wesentlichen bestätigt.

Die Versuche zeigen, daß die Aufforderung, ähnliche Figuren zusammenzulegen, einerseits in einer bestimmten Weise verstanden wird, die wesentlich vom vorliegenden Material bestimmt ist, daß aber andererseits bei allen Aufgaben eine große Zahl verschiedener Lösungen gegeben wird. Wenn man bei einigen von ihnen kaum zu einer Erklärung kommen kann, so daß man annehmen muß, die Probanden haben mehr oder weniger zufällig gelegt, scheint doch in der Mehrzahl eine Vorstellung vorzuliegen, für die man Gründe angeben kann. Das zeigt, daß der Ähnlichkeitsbegriff in Sortierversuchen mit geometrischen Figuren ebenfalls einen erheblichen Interpretationsspielraum läßt.

Von besonderer Bedeutung scheinen einmal einprägsame Figurentypen zu sein, die im Mathematikunterricht hervorgehoben werden, und offensichtlich spielt auch eine Auffassung wie „ ... ist etwa gleich groß wie ...“ eine Rolle. Innerhalb der Rechtecke ist das Seitenverhältnis so unauffällig, daß es als Merkmal zum Sortieren nicht herangezogen wird.

Die große Variation der verschiedenen Lösungen könnte man mit Hilfe der unterschiedlichen persönlichen Stile bei der Bildung von Erfahrungen erklären, wie sie von THOULESS (1932), WEBER (1939) und GARDNER (1953) nachgewiesen worden sind.

Die unterschiedliche Auffälligkeit von Merkmalen ist ein bekanntes Phänomen. Man weiß z.B. daß für Kinder Farbe auffälliger als Form ist (USNADZE 1929). Innerhalb geometrischer Figuren scheint das Seitenverhältnis relativ unauffällig zu sein. Das Ergebnis von Aufgabe 4 zeigt, daß bei Rechtecken die Eigenschaft „gleiche Breite“ auffälliger ist als die Eigenschaft „gleiches Seitenverhältnis“.

Daß die jeweilige Grundmenge das Ergebnis beeinflußt, steht im Einklang zu gestaltpsychologischen Ergebnissen, die bei Untersuchungen zur Rolle von Bezugssystemen gefunden wurden (KOFFKA 1935 und WITTE 1960).

Auch der Einfluß der Reihenfolge der Aufgaben auf die Ergebnisse laßt sich nach gestaltpsychologischen Untersuchungen vermuten. Während der Durchführung des Versuchs können „Einstellungen“ entwickelt worden sein, die zu bestimmten Lösungen geführt haben.

5.Abhängigkeit der Lösungen von Alter und Schultyp

In den Vorversuchen hatte sich bei den Lösungen keine Altersabhängigkeit feststellen lassen. Die in unserem Versuch gefundenen Daten sollen deshalb darauf untersucht werden, ob man eine Altersabhängigkeit annehmen kann. Um den Chiquadrat-Test anwenden zu können, ist es notwendig, selten aufgetretene Lösungen zusammenzufassen. Wir werden deshalb jeweils Lösungen, die mit einer relativen Häufigkeit von weniger als 20% gegeben werden, zu einer einzigen Lösung zusammenfassen. Dabei ergeben sich folgende Daten.

Aufgabe 1

	Alter			
Lösung	≤10	11-12	13-14	≥15
1	5	9	9	7
2	6	7	9	7
3	15	18	12	6

$\chi^2 = 4{,}86$ df = 6 $p < 0{,}70$

Aufgabe 2

	Alter			
Lösung	≤10	11-12	13-14	≥15
1	17	27	25	16
2	9	7	5	4

$\chi^2 = 2{,}89$ df = 3 $p < 0{,}50$

Aufgabe 3

	Alter			
Lösung	≤10	11-12	13-14	≥15
1	9	25	24	14
2	17	9	6	6

$\chi^2 = 14{,}93$ df = 3 $p < 0{,}01$

Aufgabe 4

	Alter			
Lösung	≤10	11-12	13-14	≥15
1	8	9	8	8
2	3	11	9	6
3	15	14	13	6

$\chi^2 = 5{,}89$ df = 6 $p < 0{,}50$

Aufgabe 5

	Alter			
Lösung	≤10	11-12	13-14	≥15
1	15	14	15	12
2	11	20	15	8

$\chi^2 = 2{,}44$ df = 3 $p < 0{,}50$

Aufgabe 6

	Alter			
Lösung	≤10	11-12	13-14	≥15
1	18	23	14	13
2	8	11	16	7

$\chi^2 = 4{,}10$ df = 3 $p < 0{,}30$

Auf dem 1%-Niveau läßt sich nur bei der dritten Aufgabe die Nullhypothese zurückweisen, daß kein Zusammenhang zwischen Lösungsverhalten und Alter besteht. Mit zunehmendem Alter wird die Einteilung in Rechtecke und Quadrate immer stärker bevorzugt.

Um auch die Abhängigkeit der Lösungen vom Schultyp zu untersuchen, wurden die Grundschüler ausgesondert. Für die restlichen Probanden ergaben sich folgende Tabellen.

Aufgabe 1

	Schultyp		
Lösung	HS	RS	Gym
1	12	5	11
2	13	1	14
3	30	7	7

$\chi^2 = 12{,}08$ df = 4 $p < 0{,}025$

Aufgabe 2

	Schultyp		
Lösung	HS	RS	Gym
1	41	11	25
2	14	2	7

$\chi^2 = 0{,}64$ df = 2 $p < 0{,}90$

Aufgabe 3

	Schultyp		
Lösung	HS	RS	Gym
1	40	11	20
2	15	2	12

$\chi^2 = 2{,}37$ df = 2 $p < 0{,}50$

Aufgabe 4

	Schultyp		
Lösung	HS	RS	Gym
1	12	5	12
2	16	3	9
3	27	5	11

$\chi^2 = 3{,}40$ df = 4 $p < 0{,}50$

Aufgabe 5

	Schultyp		
Lösung	HS	RS	Gym
1	26	6	18
2	29	7	14

$\chi^2 = 0{,}74$ df = 2 $p < 0{,}70$

Aufgabe 6

	Schultyp		
Lösung	HS	RS	Gym
1	30	9	20
2	25	4	12

$\chi^2 = 1{,}18$ df = 2 $p < 0{,}70$

Auf dem 2,5%-Niveau läßt sich also bei der ersten Aufgabe die Nullhypothese zurück- weisen, daß kein Zusammenhang zwischen Schultyp und Lösungsverhalten besteht. Offensichtlich entscheiden sich Realschüler (RS) und Haupt-

schüler (HS) weniger häufig für eine der beiden Hauptlösungen, als das bei Gymnasiasten (GYM) der Fall ist. Inwieweit das Lösungsverhalten von Geschlecht, Fragestellung und vorangegangenen Sortieraufgaben abhängig ist, wird an anderer Stelle untersucht (VOLLRATH 1977).

5. Folgerungen

In einem genetischen Unterricht wird man sich darum bemühen, Definitionen nicht als Fertigprodukte zu präsentieren, sondern sie aus ansprechenden Situationen heraus zu entwickeln. Dabei wird man versuchen, an Vorstellungen und Erfahrungen der Schüler anzuknüpfen und gleichzeitig die Motive hervortreten zu lassen, die zur Entwicklung des Begriffs in der Mathematik geführt haben.

Bei zahlreichen mathematischen Begriffen werden Bezeichnungen verwendet, die auch in der Umgangssprache benutzt werden. Obwohl die mathematischen Begriffe nicht mit den umgangssprachlichen Begriffen übereinstimmen, sind sie doch häufig aus allgemeinen Vorstellungen erwachsen. Man kann damit rechnen, daß solche Vorstellungen für das Lernen des mathematischen Begriffs von Bedeutung sind, sei es, daß sie den Aneignungsprozeß fördern, indem sie Vorstellungen induzieren, sei es daß sie ihn behindern, indem sie dem Begriff Eigenschaften zuordnen, die durch die Definition nicht eingeschlossen sind. In jedem Fall scheint es nützlich zu sein, wenn der Lehrer beim Unterrichten dieser Begriffe ihren umgangssprachlichen Spielraum mit berücksichtigt.

Häufig verzichtet man gerade in der Orientierungsstufe auf explizite Definitionen. Man erwartet, daß der Schüler durch den Umgang mit dem Begriff oder allein von der Bezeichnung her eine klare Vorstellung gewinnt. Die Untersuchung macht deutlich, daß ein umgangssprachlicher Begriff wie Ähnlichkeit viel zu vage ist, als daß man bei ihm auf eine Definition verzichten könnte.

Bei der Erarbeitung einer Definition kommt es besonders auf die Erfassung der charakterisierenden Eigenschaften an. Die Versuche machen deutlich, daß es notwendig ist, Hilfen für die Schüler zu entwickeln, die sie nicht gängeln. Um

solche Maßnahmen bewerten zu können, erscheint es notwendig, mehr über die Auffälligkeit geometrischer Merkmale in bestimmten Situationen zu wissen.

Literatur

Gardner, R.W.: Cognitive Styles in Categorizing Behaviour. Journ. Pers. 22 (1953), 214-233.

Koffka, K.: Principles of Gestalt Psychology. New York: 1935.

Thouless, R.H.: Individual Differences in Phenomenal Regression. British Journ. Psych. 22 (1932), 216-241.

Usnadze, D.: Die Gruppenbildungsversuche bei vorschulpflichtigen Kindern. Arch. ges. Psych. 73 (1929), 217-248.

Vollrath, H.-J.: Ähnlichkeit von Rechtecken. In: H. Winter, E. Wittmann (Hersg.): Beiträge zur Mathematikdidaktik. Hannover: 1976, 111 - 129.

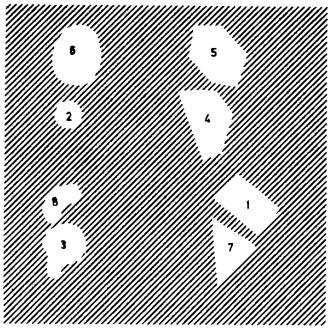
Vollrath, H.-J.: The Understanding of Similarity and Shape in Classifying Tasks. Ed. Stud. 8 (1977), 211-224.

Weber, C.O.: The Relation of Personality Trends to Degree of Visual Corrections for Size and Form. Journ. Appl. Psych. 23 (1939), 703-708.

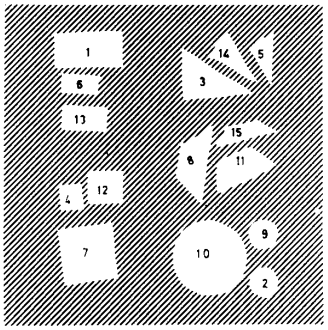
Witte, W.: Experimentelle Untersuchungen von Bezugssystemen. 1. Struktur, Dynamik und Genese von Bezugssystemen. Psych. Beitr. 4 (1960), 218-252.

Anhang

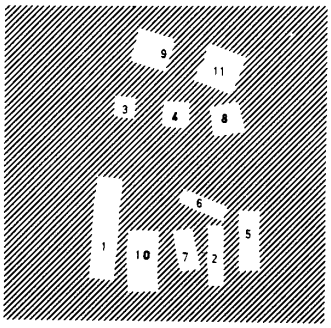
Bezeichnungen



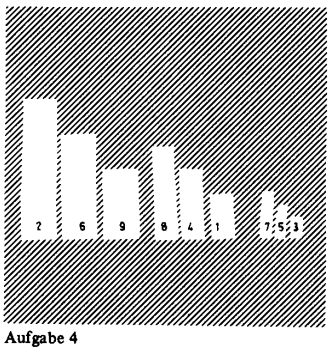
Aufgabe 1



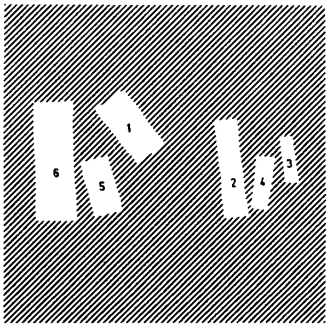
Aufgabe 2



Aufgabe 3



Aufgabe 4



Aufgaben 5, 6

1. Aufgabe

Lösung	Häufigkeit
{1,7} {4,5} {2,6} {3,8}	30
{1,4,5,7} {2,3,6,8}	29
{1,5} {4,7} {2,6} {3,8}	11
{1} {4,5,7} {2,6} {3,8}	7
{1,7} {4,5} {2,3,6,8}	5
{1} {7} {4,5} {2,6} {3,8}	9
{1} {7} {4,5} {2} {3,6,8}	1
{1,4} {5,7} {2,3,6,8}	1
{1} {2} {3} {4} {5} {6} {7} {8}	2
{1,5} {4,7} {2,3} {6,8}	1
{1} {4,5,7} {2,3,6,8}	2
{1,5} {4,7} {2,3,6,8}	1
{1,4} {5,7} {2,6} {3,8}	4
{1,4,5,7} {2,6} {3,8}	3
{1} {4} {5} {7} {2,3,6,8}	1
{1,4,5} {7} {2,6} {3,8}	1
{1,4,5} {7} {2,3,6,8}	1
{1} {7} {4,5} {2,3,6,8}	1

Tab. 13

2. Aufgabe

Lösung	Häufigkeit
{1,6,13} {4,7,12} {3,5,14} {8,11,15} {2,9,10}	85
{1,4,6,7,12,13} {3,5,14} {8,11,15} {2,9,10}	10
{3,5,8,11,14,15} {4,7,12} {1,6,13} {2,9,10}	3
{1,3,4,5,6,7,12,13,14} {8,11,15} {2,9,10}	1
{1,3,4,5,6,7,8,11,12,13,14,15} {2,9,10}	1
{1,4,6,7,8,11,12,13,15} {3,5,14} {2,9,10}	2
{1,4,6,7,12,13} {8,15} {3,5,11,14} {2,9,10}	1
{1,4,6,7,12,13} {3,5,8,11,14,15} {2,9,10}	2
{1,2,5,6,7,8,10} {12,13,14,15} {3,4,9,11}	1
{1,13} {3,5,14} {4,6} {7,12} {8,11,15} {2,9,10}	1
{1,7} {4,12} {3,5,14} {8,11,15} {6,13} {2,9,10}	1
{1,6,13} {3,5,14} {4,12} {8,11,15} {10,7} {2,9}	1
{1,6} {7,13} {8,15} {11} {2,9,10} {3,5,14} {4,12}	1

Tab. 14

3. Aufgabe

Lösung	Häufigkeit
{3,4,8,9,11} {1,2,5,6,7,10}	72
{3,4,8,9,11} {2,5,6} {1,7,10}	13
{3,4,8,9,11} {1,2,6} {5,7,10}	2
{3,4,8,9,11} {10} {1,2,5,6,7}	3
{3,4,8,9,11} {7,10} {1,2,5,6}	2
{3,4,8,9,10,11} {1,2,5,6,7}	2
{3,4,8,9,11} {1,2,5} {6,7,10}	2
{3,4,8,9,11} {5,10} {1,2,6,7}	1
{3,4} {8,9,11} {1,5,10} {2,6,7}	1
{3,4,8,9,11} {1,5,10} {2,6,7}	3
{3,4,8,9,11} {1,10} {2,5,6,7}	4
{3,4,8,9,11} {1,5} {2,6} {7,10}	2
{3,4,8,9,11} {1,7} {2,5,6,10}	1
{4,8,9,11} {1,2,5,6} {3,7,10}	1
{3,4,8,9,11} {2,6} {1,5,7,10}	1

Tab. 15

4. Aufgabe

Lösung	Häufigkeit
{1,4,8} {2,6,9} {3,5,7}	33
{1, . . . ,9}	29
{1,2,4,6,9} {3,5,7,8}	9
{1,3,9} {2,4,5,6,7,8}	5
{1,9} {2,6} {4,8} {3,5,7}	4
{1,3,5,7} {2,4,6,8,9}	4
{1,4,9} {2,6,8} {3,5,7}	1
{1,5,6} {2,3,4} {7,8,9}	1
{1,3,9} {2,6} {4,8} {5,7}	1
{1,6,9} {2,4,8} {3,5,7}	2
{1,3,6,9} {2,4,5,7,8}	4
{1,3,5,9} {2,4,6,7,8}	1
{1,2,3,6,9} {4,5,7}	1
{1,3,4,5,7,8} {2,6,9}	4
{1,3,4,5,8} {2,6,7,9}	1
{1,4,6,9} {2,3,5,7,8}	2
{1,2,6,9} {3,5,7} {4,8}	2
{1,9} {3,5,7} {2,4,6,8}	2
{1,3,4,5,7,9} {2,6,8}	1
{1,2,6,9} {3,4,5,7,8}	3

Tab. 16

Lösung	5. Aufgabe Häufigkeit	6. Aufgabe Häufigkeit
{1,5,6} {2,3,4}	56	68
{1, . . . , 6}	18	17
{1,5} {2,3,4,6}	11	8
{1,5} {2,6} {3,4}	8	9
{1,3,4,5} {2,6}	9	2
{1,3,5} {2,4,6}	1	1
{1,2,5,6} {3,4}	1	1
{1,2,6} {3,4,5}	2	1
{1,4,5} {2,3,6}	3	1
{1} {2}, . . . , {5} {6}	1	1
{1,6} {2,5} {3,4}	0	1

Tab. 17