27. Symmetrie und Verwandtschaft in der Abbildungsgeometrie

Der Mathematikunterricht 24 Heft 2 (1978), 6-19.

1.Einführung

Die Untersuchung von Eigenschaften ebener Figuren ist ein zentrales Anliegen des Geometrieunterrichts. In dieser Arbeit sollen eine Reihe didaktischer Probleme diskutiert werden, die sich bei der Behandlung der *Symmetrien* von Figuren und von Relationen zwischen Figuren wie *Kongruenz, Inhaltsgleichheit* und *Ähnlichkeit* ergeben. Dabei soll der Einfluß umfassenderer didaktischer Entwicklungen auf spezielle didaktische Probleme untersucht werden. Hier interessieren insbesondere drei Tendenzen:

> Die meisten Lehrgänge setzen heute einen starken Akzent auf Methoden der *Abbildungsgeometrie.*
>
> In den Lehrbüchern läßt sich eine Entwicklung zu Jahrgangsbänden hin feststellen. Das führt meist zu einem deutlich gestuften Aufbau der Geometrie, den man *spiralig* nennen kann.
>
> Geometrie wird heute auch in den unteren Klassen unterrichtet. Damit die Schüler dort Erfahrungen handelnd gewinnen können, wird dort meist *strukturiertes Material* eingesetzt.

Es soll gezeigt werden, wie sich unter dem Einfluß solcher Entwicklungen didaktische Fragestellungen und Argumente verschieben. Für eine Reihe von Fragen können neben Argumenten empirische Belege geliefert werden. Noch aber fehlen empirische Arbeiten weitgehend. Es ist ein Anliegen dieser Arbeit, solche Untersuchungen anzuregen.

2.Probleme zu den Inhalten

Entscheidungen für einen bestimmten Aufbau einer mathematischen Theorie bestimmen wesentlich die Art der Definition, die für einschlägige Begriffe gegeben werden. Während man es beim euklidischen Aufbau der Geometrie schwer hatte, Symmetrie, Kongruenz und Ähnlichkeit zu definieren, ohne den Abbildungsbegriff wenigstens implizit zu verwenden, bereitet es in der Abbildungsgeometrie keinerlei Schwierigkeiten diese Begriffe mathematisch korrekt zu definieren.

> Eine Figur F heißt *symmetrisch bezüglich* einer Kongruenzabbildung α, wenn α (F) = F gilt.
>
> Eine Figur F heißt *symmetrisch* wenn es eine Kongruenzabbildung $\alpha \neq \mathrm{id}$ gibt mit α (F) = F.
>
> Eine Figur F_1 heißt *kongruent zu* einer Figur F_2, wenn es eine Kongruenzabbildung gibt, die F_1 auf F_2 abbildet.
>
> Eine Figur F_1 heißt *ähnlich zu* einer Figur F_2 , wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung gibt, die F_1 auf F_2 abbildet
>
> Eine Figur F_1 heißt *inhaltsgleich zu* einer Figur F_2, wenn es eine inhaltstreue Abbildung gibt, die F_1 auf F_2 abbildet.
>
> Allgemein heißt eine Figur F_1 , *verwandt zu* einer Figur F_2, wenn es eine Abbildung der Ebene auf sich gibt, die F_1 auf F_2 abbildet.

Allerdings liegt es beim Begriff „inhaltsgleich“ näher, mit Hilfe des Inhalts A zu definieren, daß Figuren F_1 und F_2 inhaltsgleich heißen, wenn $A(F_1) = A(F_2)$ ist.

Betrachtet man Definitionen dieser Eigenschaften kritisch, die ohne diese Abbildungsbegriffe vorgehen, so zeigt es sich, daß doch insofern ein Abbildungsbegriff zugrunde liegt, als in jedem Fall zugeordnet wird, selbst wenn man das sprachlich verschleiert wie z.B. in der Definition: Ein Dreieck ABC heißt kongruent einem Dreieck A'B'C', wenn

$$\overline{AB} = \overline{A'B'},\ \overline{AC} = \overline{A'C'},\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \text{ und}$$
$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C',\ \sphericalangle BCA = \sphericalangle B'C'A',\ \sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'.$$

Hier wird die Zuordnung durch die Bezeichnung vorgenommen.

Wenn auch die abbildungsgeometrischen Definitionen begrifflich und sprachlich klarer und damit wohl verständlicher sein dürften, muß man sehen, daß sie bei Beweisen höhere Ansprüche an den Lernenden stellen, da zum Nachweis dieser Eigenschaften Existenzbeweise erbracht werden müssen. Diese Schwierigkeit wurde schon früh gesehen (SEEBACH 1958). Sie ist insofern heute nicht gravierend, als man sich in der Frühphase, in der man die Eigenschaften von Figuren entdecken läßt, mit der Angabe intuitiv erfaßter Abbildungen zufrieden gibt. Wenn man dann später beweisen muß, hat man in der Regel ein schlagkräftiges Instrumentarium, das das Führen von Beweisen erleichtert. Hier hat also das Spiralprinzip die Schwächen des abbildungsgeometrischen Vorgehens weitgehend kompensiert.

Die Symmetrie von Figuren und Verwandtschaffen zwischen Figuren beanspruchen nach wie vor ein starkes Interesse im Geometrieunterricht. Allerdings hat die Entwicklung zu stärker abbildungsorientierten Lehrgängen hin die Akzente etwas verschoben: Während das Interesse an Symmetrien von Figuren eher zugenommen hat, weil man an ihnen Eigenschaften von Deckabbildungen und allgemein von Kongruenzabbildungen gut hervorheben kann, hat das Interesse an Kongruenzsätzen eher abgenommen, da sie beim Beweisen keine so wichtige Rolle mehr spielen wie beim euklidischen Aufbau der Geometrie. Wurde früher die Frage diskutiert, ob man auch Kongruenzsätze für Vierecke behandeln soll, so ist diese Frage heute weitgehend gegenstandslos, da selbst die Kongruenzsätze für Dreiecke bei einem abbildungsgeometrischen Lehrgang eine untergeordnete Rolle spielen. Bemerkenswert ist lediglich, daß man zunächst die Kongruenzsätze in der Abbildungsgeometrie für überflüssig hielt, während man sie heute doch meist mit abbildungsgeometrischen Mitteln begründet, um sie als nützliches Hilfsmittel zum Beweisen zur Verfügung zu haben.

In der Ähnlichkeitslehre wird man dagegen neben Dreiecken auch Vierecke betrachten, da es hervorhebenswert ist, daß allein die Gleichheit entsprechender Winkel wohl bei Dreiecken, jedoch nicht bei Vierecken genügt. Zudem ist es seit langem bekannt, daß die Beurteilung von Rechtecken auf Ähnlichkeit hin dem unvoreingenommenen Betrachter Schwierigkeiten bereitet. So werden bekanntlich ineinanderliegende Rechtecke mit parallelen Seiten als ähnlich angesehen.

Symmetrien werden heute meist betrachtet, um auf Kongruenzabbildungen aufmerksam zu machen. Zudem geht von symmetrischen Figuren ein Reiz auf den Betrachter aus, der auf Kinder stark motivierend zum Studium geometrischer Formen wirken kann. Bandornamente, Rosetten, Klecksogramme usw. gehören heute zu jedem Lehrgang.

Bereits 1927 hatte SCHÜLKE erkannt, daß sich die Ideen der Symmetrien für den Unterricht nutzbar machen lassen, um daran wichtige Abbildungseigenschaften hervorzuheben. Er sah darin die Möglichkeit, Ideen des Erlanger Programms für die Schule fruchtbar zu machen. BECK regte dann (1933) an, diese Betrachtungen durch den Gruppenbegriff durchsichtiger zu machen.

Die Breite didaktischer Diskussion um abbildungsorientierten Geometrieunterricht in den dreißiger Jahren wurde in den fünfziger Jahren fortgesetzt und fand ihren Niederschlag in einer ganzen Reihe von Heften dieser Schriftenreihe. Dabei möchte ich besonders die Arbeiten von FABER (1958 b), ISHEIM (1958) und PROKSCH (1968) hervorheben. Während Achsen- und Punktsymmetrien schon seit längerem im Unterricht behandelt wurden, begann man unter dem Einfluß des Buches von WEYL (1955) erst in den letzten Jahren Dreh- und Translationssymmetrien mit einzubeziehen. Das liegt wohl hauptsächlich an der Scheu vor dem Unendlichen, das sich z.B. beim Kreis im Vorhandensein unendlich vieler Symmetrieabbildungen und bei den Bandornamenten in der gedachten Fortsetzung des Ornaments „bis ins Unendliche“ zeigt. Ob hier tatsächlich eine Schwierigkeit vorliegt, ist bisher nicht nachgewiesen.

Symmetriebetrachtungen werden gern benutzt, um zum Gruppenbegriff hinzuführen. Auch hier ergibt sich wieder eine reizvolle Möglichkeit zur Stufung: Erfassung der Symmetrie einer Figur durch Deckabbildungen – Verkettung von Deckabbildungen – Mengen von Deckabbildungen mit der Verkettung als Verknüpfung – Deckabbildungsgruppen – Gruppenbegriff. Allerdings erscheint es mir verfehlt, das Suchen von Symmetrien bereits als gruppentheoretisches Arbeiten anzusehen, wie es bei DIENES der Fall zu sein scheint.

Betrachtet man die historische Entwicklung des Symmetriebegriffs, so lassen sich zwei Linien feststellen. Im Altertum wurde Symmetrie im Sinne von „Ebenmaß“ zur Beschreibung der Schönheit von Kunstwerken benutzt. In der Mathematik schlägt sich das in der Hervorhebung symmetrischer Figuren (z.B. der platonischen Körper) und im folgenden in der Verwendung als heuristisches *Hilfsmittel* zum Erfassen von Eigenschaften und Zusammenhängen nieder. Dabei erfährt diese Arbeitsweise eine Verallgemeinerung, indem Symmetriebetrachtungen auch auf nichtgeometrische Objekte übertragen werden. ATIYAH hob 1976 auf dem Kongreß für Mathematikunterricht hervor, daß Symmetrie eine fundamentale mathematische *Idee* ist.

Ausgehend von Problemen der Mechanik werden aber Symmetrien auch *Gegenstände* mathematischer Untersuchungen. So untersucht EULER die Symmetrien bei Rotationen starrer Körper, und im vorigen Jahrhundert führte dann die Untersuchung von Symmetriegruppen zu interessanten mathematischen Fragestellungen, die bis in unsere Zeit Mathematiker beschäftigen (s. WEYL 1955). Betrachtet man die Behandlung der Symmetrie im Unterricht, so scheint heute die Betonung auf den Objekten zu liegen, während Symmetrie als Idee und heuristisches Hilfsmittel allenfalls bei Beweisen von Eigenschaften geometrischer Figuren verwendet wird. Hier liegt möglicherweise ein Ansatzpunkt für weitere didaktische Entwicklungsarbeiten, indem man nach übergreifenden Fragestellungen sucht, bei denen Symmetriebetrachtungen zu einem tragfähigen heuristischen Hilfsmittel werden. Als Beitrag in dieser Richtung kann man etwa den Ansatz von GLASER sehen (s. dieses Heft), bei dem das Erkennen von Symmetrie Strategien zum Lösen von Abzählproblemen liefert.

3. Probleme der Anordnung

In der didaktischen Diskussion sind Fragen der Reihenfolge der zu behandelnden Objekte besonders naheliegend. Das mag daran liegen, daß man zur Beantwortung dieser Fragen mathematische Argumente heranziehen kann. So kann man etwa die Frage diskutieren, in welcher Reihenfolge man die Begriffe Kongruenz von Strecken, Kongruenz von Winkeln, Kongruenz von Figuren behandeln soll. Als mathematischer Hintergrund dieser Frage können die Ansätze von PASCH, VERONESE und HILBERT dienen. Während PASCH mit der Kongruenz von Figuren mit endlich vielen Eckpunkten beginnt, gründet VERONESE seinen Aufbau auf die Kongruenz von Strecken. Dagegen sind bei HILBERT die Kongruenz von Strecken und die Kongruenz von Winkeln Grundbegriffe. Von der Mathematik her sind also unterschiedliche Ansätze entwickelt worden, die zu gleichen Ergebnissen führen, also mathematisch gleichwertig sind.

Für den Unterricht kann man nun diese verschiedenen Wege unter didaktischem Aspekt diskutieren. So schreibt GUARDUCCI in den „Fragen der Elementargeometrie“ von F. ENRIQUES über diese verschiedenen Zugänge:

> „Es ist ein Weg, der, in einem gewissen Sinne, zwischen denen der beiden anderen Autoren in der Mitte steht und der, systematisch in den Unterricht der Geometrie aufgenommen, uns vom didaktischen Gesichtspunkt aus vorteilhafter erscheint als die beiden anderen. Wir glauben in der Tat, daß man den anschaulich klaren Begriff der Winkelkongruenz durch eine Definition ersetzt (wie es Pasch und Veronese tun), nicht dazu gelangt, von dieser Beziehung eine unmittelbar verständliche Idee zu geben.“ (1911, S. 115).

Das Argument wirkt sehr unbefriedigend, zumal der Verfasser lediglich

„glaubt“, einen besseren Weg zu beschreiben. Eine solche Behauptung verlangt nach einer empirischen Überprüfung. Sie ist meines Wissens bis heute nicht geliefert worden. Andererseits hat diese Frage an Interesse verloren. Bei ihr geht es ja darum, zwischen Grundbegriffen und abgeleiteten Begriffen zu unterscheiden. Diese Frage stellt sich jedoch in dieser Weise heute nicht mehr im Unterricht, da Streckenvergleich und Winkelvergleich bereits in der Propädeutik behandelt werden, in einer Unterrichtsphase also, in der logische Abhängigkeiten dieser Art noch nicht hervortreten. Andererseits stellt sich natürlich auch dort die Frage, ob erst Streckenvergleich oder erst Winkelvergleich behandelt werden soll. Da der Streckenbegriff den Schülern viel eher vertraut wird als der Winkelbegriff, ergibt sich in natürlicher Weise, daß zunächst Strecken verglichen werden, dann Winkel. Bezieht man noch Figuren als Punktmengen in die Überlegungen mit ein, so stellt sich die Frage, ob man erst die Kongruenz von Strecken und Winkeln, dann die Kongruenz von Figuren betrachten soll, oder ob man mit der Kongruenz von Figuren beginnen soll. Hat man bereits die Kongruenzabbildungen zur Verfügung, dann werden sich für diese beiden Wege kaum signifikante Unterschiede bei den Schülerleistungen feststellen lassen.

Viele Lehrgänge vergleichen jedoch Strecken und Winkel, ehe die Kongruenzabbildungen behandelt werden, mit deren Hilfe dann die Kongruenz von Figuren eingeführt wird. Hier bietet es sich an, konsequent Strecken- und Winkelvergleich über die Maße vorzunehmen, also: die Strecke $\overline{AB}$ ist *gleich lang* der Strecke $\overline{CD}$, wenn $l(\overline{AB}) = l(\overline{CD})$, und der Winkel α ist *gleich groß* dem Winkel β, wenn $w(\alpha) = w(\beta)$.

In einigen Lehrbüchern wird statt „gleich lang“ bzw. statt „gleich groß“ der Begriff „kongruent“ benutzt. Ich halte das für problematisch, denn „gleich groß“ bedeutet bei Dreiecken eher „inhaltsgleich“. Damit würden die Schüler also in eine falsche Richtung gelenkt werden. Gänzlich unbefriedigend erscheint mir jedoch, wenn man zunächst die Kongruenz von Strecken über die Gleichheit der Längen definiert, dann aber bei den Winkeln fordert, daß sich ihre Schenkel paarweise zur Deckung bringen lassen, ohne daß Kongruenzabbildungen bereits betrachtet sind. Ähnlich gelagert ist das Problem, ob Kongruenz und Ähnlichkeit zunächst als Relationen zwischen Figuren ohne Bezug auf Abbildungen eingeführt werden sollen, oder ob sie als abgeleitete Begriffe behandelt werden sollten. Diese Frage ist wesentlich vom Grundansatz des Lehrganges her bestimmt. Bei einem „euklidisch" orientierten Lehrgang wird man den ersten Weg gehen, während man bei einem abbildungsgeometrisch orientierten Lehrgang den zweiten wählen wird. Die besondere Einfachheit des Zugangs zu diesen Eigenschaften über den Abbildungsbegriff kann man als Argument für den abbildungsgeometrischen Lehrgang ins Feld führen. Am Beispiel der Inhaltsgleichheit zeigt sich aber, daß hierbei nicht alle Relationen gleich „natürlich" erfaßt werden. Somit findet man sich als Didaktiker in dem häufig auftretenden Dilemma, daß in einem Lehrgang die Vorteile der Behandlung bestimmter Begriffe nur durch Nachteile bei der Behandlung anderer erkauft werden können. Hier zeigt sich das von STRUNZ formulierte Polaritätsaxiom:

> „Fast zu jeder wertvollen geistig-seelischen Gestalt, sei es, daß sie bereits ihre Verwirklichung gefunden hat, sei es, daß sie zunächst nur als eine ideale Zielsetzung gegeben ist, gibt es eine ebenso berechtigte polare Lebensform." (S. 52).

Immerhin läßt sich heute sagen, daß man aufgrund der didaktischen Analysen der vergangenen Jahre Vorteile und Schwächen der wichtigsten Lehrgangstypen kennt, (s. z.B. HOLLAND 1974, 1977).

Für das eben angesprochene Problem haben sich im Rahmen abbildungsgeometrischer Lehrgänge im wesentlichen zwei Ansätze herausgeschält:

Bei einem stärker deduktiv orientierten Lehrgang werden die Invarianten von Spiegelungen, Drehungen, Verschiebungen und Verkettungen herausgearbeitet. Dabei wird in der Regel die Invarianz von Streckenlänge und Winkelmaß hervorgehoben. Dann wird der Begriff Kongruenzabbildung definiert als Oberbegriff für die genannten Abbildungen. Anschließend definiert man die Relation „... ist kongruent zu..." .

Hier wird also der Name Kongruenzabbildung nachträglich gerechtfertigt. Alternativ dazu kann man natürlich bei der Behandlung von Spiegelungen, Drehungen, Verschiebungen und deren Verkettungen eine allgemeine Vorstellung von „... läßt sich zur Deckung bringen...“ vermitteln, durch die dann der Begriff Kongruenzabbildung nahegelegt wird.

Das am häufigsten diskutierte Problem der Anordnung von Inhalten in der Abbildungsgeometrie war zweifellos die Frage, in welcher Reihenfolge man die Abbildungen behandeln sollte.

Die Arbeiten von WILLERS, SCHWAN und BACHMANN zum Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff haben eine starke didaktische Resonanz gefunden. Insbesondere FABER hat interessante Lösungsvorschläge zur Entwicklung der Abbildungsgeometrie aus dem Spiegelungsbegriff gemacht.

Zunächst kann man einen solchen Lehrgang unter dem Aspekt der Motivierbarkeit sehen. Wenn man Achsensymmetrie, Punktsymmetrie, Drehsymmetrie und Verschiebungssymmetrie betrachtet, so ist nach allen Erfahrungen Achsensymmetrie am auffälligsten. Andererseits sind vom Auftreten der Bewegungen her Achsenspiegelungen am seltensten. Daß ein Aufbau aus dem Spiegelungsbegriff zweifellos mathematisch reizvoll und elegant ist, wäre für den Geometrieunterricht nur dann von Interesse, wenn man ihn an einer mathematischen Systematik orientieren will. Zumindest für den Geometrieunterricht in der Mittelstufe des Gymnasiums war das lange erklärtes Ziel. Es finden sich in den ersten abbildungsgeometrisch orientierten Geometriebüchern die verschiedensten Anordnungen dieser Symmetrien und der zugehörigen Abbildungstypen. Inzwischen jedoch hat das Interesse an dieser Frage stark abgenommen, da man die Möglichkeit, alle Kongruenzabbildungen durch Verkettung von Spiegelungen zu erzeugen, erst in einer Phase behandelt, in der bereits reichliche Erfahrungen über die einzelnen Abbildungen gewonnen worden sind. Man kann heute das Stellen dieser Frage also geradezu als Indiz für das Streben nach einem fachsystematischen Lehrgang ansehen.

Eine Variante dieser Fragestellung ergibt sich für den Bereich der Grundschule bei der Behandlung von Symmetrien. Es bieten sich dabei Lehrgänge an, bei denen erst Achsen-, dann Punktsymmetrie oder erst Punkt-, dann Achsensymmetrie oder beide Symmetrien integriert behandelt werden.

MORRIS hat 1974 von einer Untersuchung berichtet, in der nach diesen drei Ansätzen unterrichtet worden ist. Dabei zeigte sich eine gewisse Überlegenheit des integrierten Vorgehens, indem es danach den Schülern leichter fiel, wechselnde Situationen korrekt zu handhaben. Auch im Hinblick auf eine spätere Behandlung der Abbildungsgeometrie wurde eine bessere Basis gesehen. Die Folgerungen legen allerdings nahe, daß es sich hier weniger um spezifisch abbildungsgeometrische Effekte handelt als um allgemeine Lerneffekte.

Während bei den vorangegangenen Problemkreisen mathematische Argumente zumindest ins Gewicht fallen, ist das bei den folgenden Problemen nicht der Fall.

Im Anfangsunterricht kann man die Entdeckung der Symmetrie dazu benutzen, die Schüler auf Kongruenzabbildungen aufmerksam zu machen. Man kann diese Symmetrie aber auch nach der Einführung der Kongruenzabbildungen als Anwendung untersuchen. Für die erste Lösung spricht, daß Symmetrien von Figuren ungemein auffällig sind, so daß man die Schüler motivieren kann, sich mit Abbildungen, die bedeutend weniger auffallend sind, zu beschäftigen. Der wichtigste Abbildungsbegriff wird hier also aus einprägsamen Problemsituationen gewonnen. Andererseits besteht die Gefahr der Verengung des Abbildungsbegriffs, indem man nämlich jeweils nur einen Teil einer Figur auf den anderen, also nicht die ganze Ebene abbildet. Die bisherigen Erfahrungen zeigen, daß die Schüler bei beiden Wegen der Behandlung von Symmetrie, Kongruenz und Ähnlichkeit die Abbildungen auf die Figuren einschränken. Man muß also zusätzlich Maßnahmen ergreifen, um diese Verengungen zu vermeiden. So kann man etwa stets Punkte außerhalb der Figur mit abbilden lassen. Das wirkt jedoch recht künstlich und dürfte von den Schülern weitgehend abgelehnt werden. Vielleicht sollte man einmal gründlich untersuchen, wo sich wirklich Fehler ergeben, wenn sich die Schüler bei Symmetrie, Kongruenz und Ähnlichkeit auf die vorliegenden Figuren konzentrieren.

Daß Reihenfolgeprobleme unter Umständen von allgemeinen didaktischen Phänomenen überlagert werden, kann man z.B. einer Untersuchung von NUSPL (1 975) entnehmen. Er behandelte in einem Lehrgang erst die Kongruenz-, dann die Ähnlichkeitsgeometrie und ging in einem konkurrierenden Lehrgang umgekehrt vor. Dabei zeigte es sich, daß bei beiden Lehrgängen Lernziele über Kongruenzgeometrie gleich gut erreicht wurden, während sich bessere Leistungen in der Ähnlichkeitsgeometrie ergaben, wenn sie zum Schluß unterrichtet wurde. Hier kann man wohl davon ausgehen, daß die den Schülern weniger vertrauten Ähnlichkeitseigenschaften der Figuren schneller in Vergessenheit gerieten als die Kongruenzeigenschaften.

Durch die pädagogischen Diskussionen der letzten Jahre scheint es inzwischen gesichert zu sein, daß ein lineares Vorgehen in der Geometrie nicht kindgemäß ist. Bereits FLADT hatte in seinem berühmten Aufsatz „Los von Euklid oder hin zu Euklid?“ (1955) einen stufenweisen Aufbau des Geometrieunterrichts konzipiert:

> „So hebt, um mit Kant zu reden, der geometrische Unterricht (auf der Unterstufe) mit der Anschauung an, steigt von da (von der Mittel- und Oberstufe) zu Begriffen und endet (auf der Oberstufe) mit Ideen“ (S. 1 0).

Dieser Stufenaufbau entspricht weitgehend dem des richtungsweisenden Berichts der Mathematical Association von 1923. Danach soll der Geometrieunterricht auf einer *experimentellen* Stufe A beginnen, über eine *deduktive* Stufe B fortschreiten und in eine *systematische* Stufe C münden. Dieser Stufenaufbau hat großen Einfluß auf die Organisation des Geometrieunterrichts in England gehabt. Einen stärker aufgegliederten Stufenaufbau hat NICKELSEN (1963) vorgeschlagen:

> „Das Abbildungsdenken entfaltet sich stufenweise abstrahierend: von der Abbildung der Figur zur Abbildung der ganzen Ebene; von einzelnen Abbildungen zur Gruppe von Abbildungen; von Eigenschaften einer Figur

> zu den invarianten Eigenschaften hinsichtlich einer Abbildungsgruppe; von einzelnen Abbildungsgruppen zum System der Abbildungsgruppen; von der Vielzahl der Gruppen zum Begriff der abstrakten Gruppe; von der abstrakten Gruppe schließlich zu den formalen Grundlagen der Geometrie" (S. 42).

Dieses Programm scheint mir nach wie vor richtungsweisend zu sein für den Geometrieunterricht am Gymnasium.

Auch VAN HIELE hat für den Geometrieunterricht einen stufenweisen Aufbau empfohlen, und FREUDENTHAL hat sich als leidenschaftlicher Verfechter dieser Idee gezeigt. BRUNER hat schließlich mit der eingängigen Formulierung „Spiralprinzip" diesen Ideen allgemein zum Durchbruch verholfen.

Entscheidend an diesen Ansätzen ist, daß man die Organisationsprobleme nicht ausschließlich unter dem Aspekt der Anordnung sondern wesentlich unter dem des *Niveaus* sieht. Mag es im einzelnen auch schwierig sein, die Niveaus zu beschreiben, so hat sich doch der Grundsatz bewährt, Geometrie auf verschiedenen Niveaus zu unterrichten.

Damit hat man nicht nur die Möglichkeit, sich innerhalb eines Schultyps den verschiedenen Altersstufen anzupassen, sondern erhält auch Differenzierungsmodelle.

Die meisten Lehrgänge werden heute mehr oder weniger spiralig aufgebaut. (Dies wird durch den Trend gefördert, von Themenbänden zu Jahrgangsbänden überzugehen). Dabei kann man so vorgehen, daß man die ganze Breite geometrischer Phänomene auf jedem Niveau unterrichtet, oder man expandiert inhaltlich mit steigendem Niveau.

Auch hier kann man für die verschiedenen Wege Argumente angeben, beide Ansätze finden sich in den Lehrbüchern, so daß man Unterrichtserfahrungen sammeln kann. Nach meiner Ansicht spricht mehr für ein Vorgehen in ganzer Breite über verschiedene Niveaus, da dann die Schüler stets auf dem höheren Niveau über das notwendige Wissen des vorherigen verfügen.

4. Probleme der Sprache

Die Begriffe „Gleichheit“, „Kongruenz“ und „Ähnlichkeit“ haben eine historische Entwicklung erfahren, die im Hinblick auf die Erforschung geistiger Strukturen beachtenswert erscheinen.

EUKLID verwendet „gleich“ im Sinne von „kongruent“, wenn er z.B. formuliert:

> „Dinge, die einander decken, sind einander gleich“ (1. Buch, Axiom S).

Er verwendet gleich im Sinne von „inhaltsgleich“' wenn er formuliert:

> „Dreiecke auf derselben Grundlinie und zwischen denselben Parallelen sind einander gleich“ (1. Buch, Satz 37).

Dieser verschwommene Begriff der Gleichheit zieht sich durch die ganze Geometrie bis in die Neuzeit. So formuliert SNELL (1819):

> „Zwey Figuren überhaupt sind gleich, wenn sie sich decken“ (5.21).

Andererseits vermerkt er zusätzlich:

> „Figuren, welche sich wechselseitig decken, heißen kongruent. Es gibt aber auch Figuren, welche dem Inhalt nach gleich sind, und doch verschiedene Gestalt haben: diese sind gleich groß, aber nicht kongruent“ (S. 22).

Auch bei bedeutenden Mathematikern dieser Zeit findet sich noch nicht die von uns erwünschte Klarheit. So formuliert MÖBIUS (1827) in seinem richtungweisenden Buch „Der baryzentrische Kalkül“:

> „Wenn in zwei Figuren jedem Punkt der einen Figur ein Punkt der anderen entspricht, dergestalt, daß der gegenseitige Abstand zweier Punkte der einen Figur dem gegenseitigen Abstand der entsprechenden Punkte in der anderen Figur gleich sind, so sind die Figuren einander *gleich und ähnlich*“ (S. 169).

Er meint also Kongruenz. Gleichheit verwendet er im Sinne von „Inhaltsgleichheit“ Ähnlichkeit im heute üblichen Sinne. Während die Enzyklopädie der Elementarmathematik von WEBER und WELLSTEIN (1905) den Begriff der Kongruenz benutzt, spricht das Werk gleichen Titels von ALEXANDROFF, MARKUSCHEWITSCH und CHINTCHIN (1969) von „Gleichheit“:

> „Figuren sind *gleich,* wenn man die eine von ihnen mittels einer Bewegung in die andere überführen kann“ (S. 30).

Obwohl heute in den Schulbüchern zumindest bei den Dreiecken zwischen gleich, kongruent und inhaltsgleich (bzw. flächengleich) unterschieden wird, geschieht das nur selten bei Strecken und Winkeln (bei ihnen sagt man dann allerdings meist „gleich lang“ bzw. „gleich groß“).

Andererseits sollte sich der Lehrer dessen bewußt sein, daß auch der Kongruenzbegriff für Dreiecke einer Entwicklung in der Vorstellung der Schüler unterworfen ist. Während sie in der Anfangsphase meinen: „Das ist das gleiche Dreieck nur in einer anderen Lage“, erfassen sie später die Kongruenz als Relation zwischen verschiedenen Objekten. Diesen Entwicklungsprozeß sollte man behutsam zu fördern suchen. Dabei kann man vor zu rigorosen Forderungen bewahrt bleiben, wenn man sich der sprachlichen Entwicklung dieses Begriffs in der Mathematik bewußt ist.

Beim Begriff der Ähnlichkeit begegnen wir dem Problem, daß dieser Begriff in der Umgangssprache in verschiedenen Zusammenhängen mit unterschiedlicher Bedeutung verwendet wird.

Es ist äußerst fraglich, ob diese Bedeutungen mit der Entwicklung des Kindes in Richtung mathematischer Ähnlichkeit präzisiert werden, wie man den Arbeiten von PIAGET entnehmen könnte. Empirische Untersuchungen zeigen, daß das zugrundeliegende Verständnis des umgangssprachlichen Ähnlichkeitsbegriffs stark situationsabhängig bleibt (VOLLRATH, 5. Beitrag in diesem Heft).

Dem umgangssprachlichen Begriff der Ähnlichkeit scheint mir eher der von MÖBIUS eingeführte Begriff der *Verwandtschaft* zu entsprechen.

Auch der Begriff der Verwandtschaft ist einer Entwicklung unterzogen worden. MÖBIUS bezieht ihn *auf Relationen* zwischen Figuren:

> „Die einfachste und engste Art von Verwandtschaft, die zwischen Figuren statt haben kann, ist die Gleichheit und Ähnlichkeit, indem von zwei Figuren die eine nichts anderes, als eine vollkommene Wiederholung, ein nochmaliges Setzen der anderen ist." (S. 174).

Dieser Begriff der Verwandtschaft umfaßt bei ihm im folgenden zunächst Gleichheit, Kongruenz, Ähnlichkeit, Affinität, Inhaltsgleichheit und Kollinearität von Figuren. Später betrachtet er auch andere Abbildungstypen und durch sie erzeugte Verwandtschaften. Während er nach meiner Auffassung eindeutig Relationen zwischen Figuren meint, wird es später üblich, die Abbildungen als Verwandtschaften zu bezeichnen. So spricht etwa KLEIN davon, „daß sich jede affine Verwandtschaft zweier Ebenen auf unendlich viele verschiedene Weisen durch Kombination einer Ähnlichkeitstransformation und einer Parallelprojektion herstellen läßt" (S. 85). Das setzt sich in der didaktischen Diskussion fort. So schreibt DREETZ (1934):

> „Die Bestrebungen, Gruppenbegriff und Abbildung in den geometrischen Schulunterricht hineinzutragen, gehen von dem Gedanken aus, auch diesem Teile des mathematischen Unterrichts einen Gesichtspunkt von ähnlicher Tragweite und Einheitlichkeit zu geben, wie es der Funktionsbegriff für die Analysis ist. Dieser Gesichtspunkt kann nur der der geometrischen Verwandtschaften sein. Der Zögling muß ‚sehen', daß es auch in der Welt der Figuren keine Sprünge gibt, daß die einzelnen Figuren durch Symmetrien, Kongruenz, Ähnlichkeit, Affinität oder Projektivität miteinander zusammenhängen und auseinander hervorgehen." (S. 85)

Die Redewendung „miteinander zusammenhängen" könnte auf die Relation hinweisen, während „auseinander hervorgehen" auf die Abbildung zielt.

Ähnlich verschwommen wird dieser Begriff der Verwandtschaft dann auch in den Schulbüchern angesprochen, was angesichts der verschiedenen Deutungen durch die großen Vorbilder nicht verwunderlich ist. Außerdem fehlte natürlich der Begriffsapparat mit dem sich das brauchbar präzisieren läßt. Zudem ist der Begriff in der Mathematik in den Hintergrund getreten. In der didaktischen Diskussion der letzten 20 Jahre wurde er dann jedoch wieder im ursprünglichen Sinne als Relationsname verstanden (z.B. BECKMANN 1958).

Für den Unterricht erscheint es mir erforschungswert, inwieweit die Schüler sehen, daß zu jedem der wichtigen Abbildungsbegriffe eine Äquivalenzrelation zwischen den Figuren gehört. Insbesondere scheint es bisher nicht geklärt zu sein, inwieweit die Schüler die durch diese Äquivalenzrelation erzeugten Klasseneinteilungen erfassen, inwieweit sie also die Klasse und inwieweit sie die Repräsentanten sehen. Das scheint wichtig zu sein, denn viele dieser Klassen haben eine fundamentale geometrische Bedeutung. Ich erinnere nur an „Form“ und „Inhalt“. In der Regel werden die Begriffe Länge, Winkelmaß, Inhalt und Form gesondert entwickelt. Sie werden allenfalls als Invarianten bewußt gemacht. Es dürfte den wenigsten Schülern klar sein, daß sich diese Begriffe als Äquivalenzklassen kongruenter Strecken, kongruenter Winkel, zerlegungsgleicher Figuren und ähnlicher Figuren interpretieren lassen.

Das allgemeine Bemühen um Präzisierung der Sprache im Mathematikunterricht hat dazu geführt, daß man heute in den Lehrbüchern mit der Formulierung der Relationen sorgfältiger vorgeht. So sagt man statt „die Dreiecke sind kongruent“ etwas präziser „die Dreiecke sind *kongruent zueinander*“. Diese Redewendung erlaubt man nach Möglichkeit erst, wenn den Schülern die Einsicht vermittelt wurde, daß die Relation „ . . . ist kongruent zu . . . symmetrisch ist“. Man sagt zwar nicht kongruente Strecken, vermeidet jedoch „gleiche Strecken“, indem man „gleich lange Strecken“ sagt. Ebenso hält man es mit den Winkeln. So hat z.B. KIRSCH (1972) gefordert:

> „Man darf nicht – wie es auch heute noch vielfach geschieht – Strecken bzw. Winkel (als Punktmengen) mit ihren Maßen identifizieren“ (S. 142).

Andererseits führt die Erfüllung solcher Forderungen häufig zu schwerfälligen Formulierungen und zur Aufgabe bewährter Bezeichnungspraktiken. Es zeigt sich durchgehend, daß die Schulbücher dieses Präzisionsniveau nicht durchhalten. So wird z.B. α sowohl als Variable für Winkel als auch als Variable für Winkelmaße verwendet. Es wird behauptet, man müsse es nur mal den Schülern bewußt gemacht haben, dann könne man wieder nachlässig werden. Bisher fehlt jedoch der Nachweis, daß ein Schüler, der nach gewonnener Einsicht und einer Phase präzisen Sprechens wieder nachlässig spricht, hinsichtlich des Lernens von Mathematik einem anderen überlegen ist, der ohne eine solche Präzisierungsphase nachlässig spricht. Insbesondere konnte bisher nicht nachgewiesen werden, daß durch einen strengen Sprachgebrauch entwicklungsbedingte Verengungen des Begriffsverständnisses beseitigt werden können. Von daher erscheinen manche sprachliche Präzisierungsbestrebungen im Geometrieunterricht übertrieben.

5. Probleme der Modelle

Der Begriff Kongruenz wurde bereits früh mit der Vorstellung von Bewegungen verbunden. Bereits die von EUKLID benutzten Redewendungen bei Kongruenzbeweisen lassen vermuten, daß ihnen die Vorstellung zugrundeliegt, eine Figur werde bewegt und auf die andere gelegt. HELMHOLTZ betrachtet Bewegungen als natürliche Grundlage des Begriffs der Kongruenz, und für POINCARÉ stellen sie den Fundamentalbegriff der Geometrie dar. Andererseits wurde diese Vorstellung der Bewegung als etwas der Geometrie Fremdes empfunden. Typisch ist der folgende Einwand, der von WEBER-WELLSTEIN wiedergegeben wird:

> „Mag man den Begriff der Gleichheit bei materiellen Geraden immerhin auf die Bewegung gründen, in die Geometrie kann er nicht so ohne weiteres übernommen werden. Die Bewegung muß auf alle Fälle eliminiert werden" (S. 14).

Diese Probleme haben auch in der didaktischen Diskussion eine Rolle gespielt. So argumentiert GUARDUCCI gegen Bewegungsvorstellungen im Geometrieunterricht:

> „Diese Art der Darstellung, die didaktisch sehr einfach ist, kann, so genommen, nicht als den Forderungen einer logischen Gestaltung der Geometrie entsprechend angesehen werden“ (ENRIQUES 1911, S. 104).

In England wurde die Diskussion über diese Frage durch die Bemerkung von RUSSELL ausgelöst:

> „Die einleuchtende Benutzung der Bewegung ist irreführend, was in der Geometrie Bewegung genannt wird, ist nur die Verlagerung der Aufmerksamkeit von einer Figur oder Menge von Elementen auf eine andere. Wirkliches zur Deckung bringen, wie es dem Namen nach bei Euklid gebracht wird, ist nicht erforderlich“ (zitiert nach dem MA-Report von 1923, S. 28).

Der Ausweg aus dem Dilemma wurde nach Vorarbeiten von HELMHOLTZ durch LIE gewiesen, indem er herausarbeitete, daß der Bewegung der realen Figur eine Abbildung der idealen Figur entspricht. Der Abbildungsbegriff hat hier auch aus einer didaktischen Schwierigkeit geführt, denn einerseits sah man den didaktischen Vorteil solcher Bewegungsvorstellungen, störte sich aber andererseits an dem Methodenbruch: Obwohl also durch eine Grundlagendiskussion dies Problem eigentlich gelöst ist, ergeben sich doch eine ganze Reihe didaktischer Fragen. Das von BRUNER formulierte Spiralprinzip legte es nahe, auch im Geometrieunterricht eine enaktive Phase des Handelns mit konkreten Gegenständen einzuplanen. Sie soll zu Erfahrungen führen, die als Grundlage geometrischen Denkens geeignet sind. Es hat sich inzwischen überall eingebürgert, den Geometrieunterricht mit einer Propädeutik zu beginnen, in der die Schüler mit konkretem Material arbeiten. So werden etwa Spiegel, Klecksogramme, Transparentpapier und Folien verwendet, um den Begriff der Achsenspiegelung zu erarbeiten. Tätigkeiten mit diesen Materialien können den Schülern helfen, Eigenschaften von Achsenspiegelungen zu finden. Es liegt nahe, zu untersuchen, ob diese verschiedenen Materialien unterschiedliches leisten beim Finden solcher Eigenschaften. In Einzeluntersuchungen haben sich gewisse Überlegenheiten gezeigt (s. die Arbeit von GENKINS in diesem Heft), andererseits haben Unterrichtsversuche ergeben, daß die Unterschiede offensichtlich leicht im Unterricht verwischt werden, da der Lehrer die Schwächen eines Verfahrens in der Regel sofort korrigiert (s. die Arbeit von KIRSCHE in diesem Heft).

Interessant erscheint auch die Frage, ob diese Methoden einen Einfluß auf die Begriffsbildung haben. Man könnte vermuten, daß Schüler, die beim Arbeiten mit Papier stets falten, um so die Achsensymmetrie zu untersuchen, Schwierigkeiten haben, später Achsenspiegelungen als Abbildungen der ganzen Ebene und nicht nur einer Teilfigur anzusehen. Es zeigt sich auch, daß die Schüler bei Handlungen unter Umständen durch das Material bedingte Einengungen des Begriffs erfahren. So kann es etwa dazu führen, daß das Umwenden von Transparentpapier bei den Achsenspiegelungen zu der Vorstellung führt, als handele es sich bei der ebenen Achsenspiegelung in Wirklichkeit um eine räumliche Drehung.

Neben dem direkten Bezug auf die Abbildungen und die damit verbundenen Eigenschaften von Figuren hat natürlich das Umgehen mit solchen Materialien eine ungemein stimulierende Wirkung auf Kinder, das sie ihre Umwelt ganz anders erfahren läßt als ein lediglich konstruktiv oder gar theoretisch orientierter Geometrieunterricht. Die anregenden Arbeiten von WALTER und die von ihr berichteten Unterrichtsversuche über Entdeckungen mit Spiegeln legen ein beredtes Zeugnis dafür ab.

Daß sich auch im fortgeschritteneren Geometrieunterricht Arbeiten mit Transparentpapier bewähren, ist durch zahlreiche Unterrichtserfahrungen gesichert; daß sie sich auch geometrisch rechtfertigen lassen, zeigen die Untersuchungen von LIND (s. dieses Heft). Für die Grundschule sind zahlreiche Materialien entwickelt worden, die es gestatten, symmetrische Figuren zu legen. Sie sind geeignet, Symmetrien finden zu lassen und Symmetrien zu erzeugen. Dabei geht es nicht nur um Vorübungen zum Abbildungsbegriff sondern auch um das Erkennen geometrischen Formenreichtums und das Erfassen von Beziehungen. Insbesondere erwartet man von dem Umgang mit solchen Materialien, daß bestimmte Verengungen überwunden werden. So ist seit den Beobachtungen von MACH bekannt, daß Schüler in der Grundschule beim Erfassen von Figuren und ihren Eigenschaften bestimmte Richtungen bevorzugen. Das wirkt sich z.B. beim Erkennen von Achsensymmetrien darin aus, daß vertikale Achsen leichter gesehen werden als schräge. Bei der Kongruenz von Figuren werden bekanntlich bezüglich Translationen kongruente Figuren eher als kongruent angesehen als solche, bei denen Spiegelungen oder Drehungen erforderlich sind. Auch in der Orientierungsstufe muß man damit rechnen, daß hier Schüler noch Schwierigkeiten haben. Wie bei den meisten entwicklungspsychologischen Phänomenen ist es auch hier fraglich, inwieweit der Unterricht den Prozeß beeinflussen kann.

Es wäre jedenfalls interessant die entwickelten Materialien daraufhin zu untersuchen, ob sie solche Schwierigkeiten überwinden helfen (Erste Ansätze finden sich in der genannten Arbeit von GENKINS).

Viele Lehrbücher benutzen in der Orientierungsstufe Karogitter zur einfachen Beschreibung von Figuren, zum Finden von Eigenschaften, zum Suchen von Bildern und zum Finden geeigneter Abbildungen. Symmetrie von Figuren und Kongruenz zwischen Figuren lassen sich damit leicht erkennen. Darüber hinaus fördert es die Vorstellung, daß die ganze Ebene abgebildet wird. Andererseits werden durch das Gitter besondere Abbildungen bevorzugt, was sich insbesondere bei Drehungen sehr störend bemerkbar macht. Dagegen hat sich bisher in der Bundesrepublik noch nicht das Geo-Brett eingebürgert, mit dem man z.B. in England hervorragende Erfahrungen in der Sekundarstufe 1 gemacht hat. Gegenüber dem Karogitter bietet dieses Material die Möglichkeit enaktiven Arbeitens. Zumindest in der Hauptschule könnte es auch ein zusätzliches Hilfsmittel sein (s. dazu die Anregungen im Buch von STEIBL). Neben diesen Materialien, die man eher als methodische Hilfen bezeichnen kann, haben im Geometrieunterricht seit jeher mathematisch relevante Werkzeuge eine wichtige Rolle gespielt.

Es hat z.B. das Bestreben gegeben, zu den jeweiligen Abbildungstypen adäquate Zeichengeräte zu entwickeln, die genau die Invarianten des jeweiligen Abbildungstyps benutzen. Als Beispiel seien das Spiegellineal von PROKSCH und das Parallelenlineal von PRADE genannt.

Von den Konstruktionen mit beschränkten Geräten ist offensichtlich auf Mathematiker eine gewisse Faszination ausgegangen. Nach den bekannten Beschränkungen auf Zirkel und Lineal in der klassischen Geometrie haben Untersuchungen über Konstruktionen mit dem Zirkel allein bzw. dem Lineal allein Interesse gefunden. Einen schönen Bericht über diese Probleme findet man bei ENRIQUES (Band 2). Andererseits bemängelt bereits KLEIN, daß solche künstlichen Einschränkungen häufig unnötige Schwierigkeiten erzeugen, ohne daß den Schülern die eigentlich mathematisch reizvollen Fragen bewußt werden. So interessant also die Verwendung jeweils der Theorie adäquater Zeichengeräte in einem systematisch orientierten Lehrgang sein mag, so wenig haben sich solche Ansätze bisher in den Lehrbüchern durchsetzen können.

Das Geo-Dreieck hat einen Siegeszug angetreten, mit dem alle anfallenden Zeichenaufgaben mühelos mit ausreichender Genauigkeit gelöst werden können. Insofern hat also auch hier die Entwicklung der Lehrgänge zu einer Veränderung der Fragestellung geführt.

Literatur:

Alexandroff, P.S, Markuschewitsch, A.I., Chintchin, A.J., Enzyklopädie der Elementarmathematik IV, Berlin 1969

Bachmann, F., Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff, Berlin 1959

Beck, H., Gruppentheorie und Schulgeometrie, ZMNU 64 (1933) 254-260

Beckmann, F., Die abbildungsgeometrische Behandlung der Ähnlichkeit, MU 4, Heft 3 (1958) 57-71

Dreetz, W., Gruppenbegriff und Abbildung im mathematischen Schulunterricht, ZMNU 65 (1934) 85-88

Enriques, F., Fragen der Elementargeometrie 1,2 Leipzig 1911, 1907

Faber, K., Konstruktiver Aufbau der Euklidischen Geometrie aus den Grundsätzen der Spiegelungen, MU 4, Heft 3, (1958) (a) 20-56

Faber, K., Kongruente Abbildungen und zentralsymmetrische Figuren, MU 4, Heft 3 (1958) (b) 72-85

Fladt, K., Los von Euklid oder hin zu Euklid? MU 1 Heft 1 (1955) 5-10

Freudenthal, H., Mathematik als pädagcgische Aufgabe 2, Stuttgart 1973

van Hiele-Geldorf, D., De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O., Leiden 1957

Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1899

Holland, G., Geometrie für Lehrer und Studenten, Band 1, 2., Hannover 1974, 1977

Isheim, W., Propädeutische Einführung von Bewegungsgruppen anhand von Streifenornamenten, MU 4, Heft 3 (1958) 86-95

Kirsch, A., Ein didaktisch orientiertes Axiomensystem der Elementargeometrie, MNU 25 (1972) 139-145

Klein, F., Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, II, Berlin 1925[3]

Mathematical Association, The Teaching of Geometry in Schools, London 1923

Möbius, A., Der baryzentrische Kalkül, Leipzig 1827. In: Gesammelte Werke, Leipzig 1885

Morris, J.P., A comparison of three instructional strategies for teaching bilateral and rotational symmetry to second grade students, Ed.D. Indiana University 1974

Nickelsen, H., Unterrichtserfahrungen mit Abbildungsgeometrie, MU 9, Heft 1 (1963)

Nuspl, J.M, The effects of generalization and specialization in curricular units in transformation geometry, Ed.D. Columbia University 1975

Pasch, M, Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882

Prade, H., Affine Geometrie im Mittelstufenunterricht der Gymnasien, MU 12, Heft 5 (1966) 5-36

Proksch, R., Der Begriff der Symmetrie in gruppentheoretischer Auffassung, MU 14, Heft 4 (1968) 79-92

Proksch, R., Konstruktionen mit dem Spiegellineal, MU 2, Heft 1 (1956) 20-31

Seebach, K., Über neue Methoden im Geometrieunterricht der höheren Schule, MNU 10 (1958) 337-340

Snell, F., Leichtes Lehrbuch der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie, 2. Teil, Gießen 1819

Schülke, A., Das Erlanger Programm und die Schulgeometrie, ZMNU 58 (1927) 401-407

Schwan, W., Elementare Geometrie, Leipzig 1929

Steibl, H., Geo-Brett im Unterricht, Göttingen 1974

Strunz, K., Der neue Mathematikunterricht in pädagogisch-psychologischer Sicht, Heidelberg 1968

Veronese, G., Fondamenti di Geometria, Padova: 1891

Walter, M., Entdecke neue Bilder, Annette, Wesel 1973

Weber, H., Wellstein, J., Enzyklopädie der Elementarmathematik II, Leipzig: 1905

Weyl, H., Symmetrie, Basel 1955

Willers, H., Die Spiegelung als primitiver Begriff im Unterricht, ZMNU 53 (1922) 68-77