13. Betrachtung von Eigennullen in einer Funktionenhalbgruppe als Axiomatisierungsübung

Mathematisch- physikalische Semesterberichte 19 (1972), 28-37

1. Einleitung

Bei der didaktischen Diskussion über das Lehren typischer mathematischer Arbeitsweisen ist auch das Axiomatisieren betrachtet worden (z.B. KIRSCH 1966). Es handelt sich bei den dabei betrachteten Beispielen um mathematisch grundlegende oder für die Anwendung bedeutsame Gegenstände. In allen Fällen scheint mir aber der Spielraum für die Eigenaktivität des Schülers oder die Möglichkeit, zu eigenen originellen Lösungen zu kommen, verhältnismäßig gering zu sein. In dieser Arbeit soll ein Beispiel aus dem klassischen Schulstoff vorgelegt werden, das Schülern durchaus die Chance zu eigenen, selbständigen Leistungen etwa im Rahmen einer Jahresarbeit oder eines Wettbewerbs gibt. Sie können sich dabei eine grundlegende mathematische Arbeitstechnik an einem elementaren Gegenstand aneignen und ihre mathematischen Fähigkeiten unter Beweis stellen.

2. Ein teilweise geordneter Halbmodul reeller Funktionen

In der ersten Phase der Untersuchungen wird als Basis für das Axiomatisieren die Menge F aller reellen Funktionen mit 0 in ihrem Definitionsbereich betrachtet. F wird strukturiert durch

(1) $\quad f + g :_{def} x \to f(x) + g(x) \mid x \in D_f \cap D_g,$

dabei bezeichnen D_f und D_g die Definitionsbereiche von f und g. (1) definiert eine Verknüpfung, die assoziativ und kommutativ ist. Es existiert ein neutrales Element, nämlich

$$o: x \to 0 \mid x \in \mathbb{R}.$$

(F,+) ist also Halbmodul. (Es ist jedoch kein Modul, wie man sich leicht klarmacht.)

Betrachten wir das Element o etwas näher:

(2) $f + o = f$ für jedes $f \in F$.

o löst also die Gleichung

(3) $f + n = f$

für gegebenes f. Diese Gleichung besitzt aber noch andere Lösungen. Sei $D \subseteq D_f$, dann bezeichnen wir die Einschränkung von f auf D mit $f \mid D$. Offenbar ist $o \mid D_f$ ebenfalls Lösung von (3). Ist jedoch $D_f \supseteq D_g$, so gilt $g + o \mid D_f \neq g$. Das gibt uns Anlaß zur

Definition: Ein Element $n \in F$ mit $f + n = f$ heißt *Eigennull* von f. Dagegen bezeichnen wir o als *Universalnull*.

Natürlich ist o auch Eigennull jedes Elements von F. Wir wollen nun alle Eigennullen eines gegebenen Elements f bestimmen. Wie man sich unmittelbar klarmacht, gilt der

Satz: Die Eigennullen von $f \in F$ sind genau die Fortsetzungen von $o \mid D_f$.

Man beachte, daß weder jede Einschränkung von o Eigennull von f ist, noch daß jede Eigennull von f Einschränkung von o ist.

Wir wollen Eigenschaften von Eigennullen zum Gegenstand für Axiomatisierungsübungen machen. Es ist dazu zweckmäßig, die Relation „ist Fortsetzung von“ in die Betrachtungen einzubeziehen. Wir schreiben

$f \subseteq g$ genau dann, wenn g Fortsetzung von f ist.

Diese Relation ist reflexiv, antisymmetrisch, transitiv und isoton. $(F, +, \subseteq)$ ist also ein teilweise geordneter Halbmodul.

3. Eigenschaften von Eigennullen

Zunächst eignet sich die Hervorhebung von Eigennullen im Unterricht zur Vertiefung des Begriffs „neutrales Element“. Es läßt sich häufig feststellen, daß die Schüler bei der Formulierung der Forderung der Existenz eines neutralen Elements sorglos mit den Quantoren umgehen und nicht auf die Reihenfolge achten. Die Eigennullen eignen sich zur Begründung des Hinweises, daß es auf die Reihenfolge der Quantoren ankommt. Man betrachte etwa die Formulierung der beiden Forderungen:

Es gibt ein n, so daß für alle f gilt: $f + n = f$.

(Existenzforderung für ein additives neutrales Element)

Für alle f gilt: es gibt ein n mit $f + n = f$.

(Existenzforderung für Eigennullen)

Wir wollen nun einen Katalog von Eigenschaften von Eigennullen zusammenstellen, der Grundlage für die Axiomatisierungsübungen werden soll. Aus dem Satz in 2. ergibt sich unmittelbar:

(S 1) $o|D_f$ ist die kleinste Eigennull von f; d.h.

es gilt $f+o|D_f = f$ und aus $f + n = f$ folgt $o|D_f \subseteq n$.

o ist kleinste Eigennull von o. Andererseits gilt $o|D_f \subseteq o$ für alle f. Bezeichnen wir jede Funktion der Form $o|D_f$, $f \in F$, als eine „kleinste Eigennull“, so erhalten wir:

(S 2) o ist größtes Element in der Menge der kleinsten Eigennullen.

Weiter gilt für die kleinsten Eigennullen:

(S 3) $o|D_f + o|D_g = o|D_{f+g}$.

(S 4) Wenn $f \subseteq g$, dann $f = g + o|D_f$.

(S 5) Wenn $f = g + o|D_f$, dann $f \subseteq g$.

(S 6) Wenn $f \subseteq g$, dann $o|D_f \subseteq o|D_g$.

(S 7) $o|_{Do|Df} = o|D_f$.

(S 8) $o|D_f + o\ |D_f = o|D_f$.

(S 9) Wenn $o|D_f \subseteq o|D_g$, dann $o|D_f = o|D_f + o|D_g$.

(S l0) Wenn $o|D_f = o|D_f + o|D_g$, dann $o|D_f \subseteq o|D_g$.

(S 1l) Wenn $o|D_f \subseteq g$, dann $f = f + g$.

(S 12) Wenn $f = f + g$, dann $o|D_f \subseteq g$.

(S 13) Wenn $f \subseteq g$, dann $f + o|D_g = g + o|D_f$.

Diese Aussagen werden als Vermutungen oder als Ergebnisse von Umformungen gefunden. Einige sind die Umkehrung anderer aufgeführter Aussagen. Bei einigen Aussagen fehlt die Umkehrung. Die Schüler sollten sich daran gewöhnen, bei „Wenn..., dann ... -Aussagen“ stets zu fragen, ob die Umkehrung gilt.

Bei (S 6) muß man das verneinen, denn

$$f: x \to 2x|x \in \mathbb{N} \text{ und } g: x \to x|x \in \mathbb{Z}$$

liefern ein Gegenbeispiel. Ähnlich überzeugt man sich davon, daß (S 13) nicht umkehrbar ist.

Diese Aussagen lassen sich durch Rückgriff auf die Definition leicht beweisen. Diese „Geradeaus-Beweise“ sind ziemlich langweilig. Spätestens bei (S 9) wird man entdecken, daß man die Aussage mit Hilfe von (S 4) und (S 7) beweisen kann. Es ergibt sich nun die reizvolle Aufgabe, solche logischen Zusammenhänge zwischen den 13 Aussagen anzugeben. Dazu bestehen zahlreiche Möglichkeiten. Wir geben ein Beispiel.

4. Ein logisches Netz

Einige Zusammenhänge ergeben sich auf den ersten Blick: Aus (S 1) folgt (S 2), aus (S 2) folgt (S 5) und aus (S 1) folgt (S 12).

Aus (S l) und (S 3) folgt (S 8):

$$f + o|D_f + o|D_f \underset{(S1)}{=} f \underset{(S1)}{\Rightarrow} o|D_f \subseteq o|D_f + o|D_f.$$

$$(S\ 3) \Rightarrow o|D_f + o|D_f = o|D_{f+f} \underset{(S1)}{\subseteq} o|D_f.$$

Wegen der Antisymmetrie folgt (S 8).

Aus (S 1), (S 4) und (S 13) folgt (S 6):

$$f \subseteq g \underset{(S4)}{\Rightarrow} f = g + o|D_f \underset{(S\ 13)}{=} f + o|D_g \underset{(S\ 1)}{\Rightarrow} o|D_f \subseteq o|D_g.$$

Aus (S 1) und (S 8) folgt (S 7):

$$f + o|D_{o|Df} \underset{(S\ 1)}{=} f + o|D_f + o|D_{o|Df} \underset{(S\ 1)}{=} f + o|D_f = f.$$

Daraus folgt nach (S1) $o|D_f \subseteq o|D_{o|Df}$.

(S 1) angewandt auf (S 8) liefert $o|D_{o|Df} \subseteq o|D_f$

Die Antisymmetrie ergibt die Behauptung.

Aus (S 1) und (S 7) folgt (S 10):

$$o|D_f = o|D_f + o|D_g \underset{(S\ 1)}{\Rightarrow} o|D_{o|Df} \subseteq o|D_g \underset{(S7)}{\Rightarrow} o|D_f \subseteq o|D_g.$$

Aus (S 1), (S 4) und (S 7) folgt (S 11):

$$o|D_f \subseteq g \underset{(S4)}{\Rightarrow} o|D = g + o|D_{o|Df} \underset{(S\ 7)}{=} g + o|D_f.$$

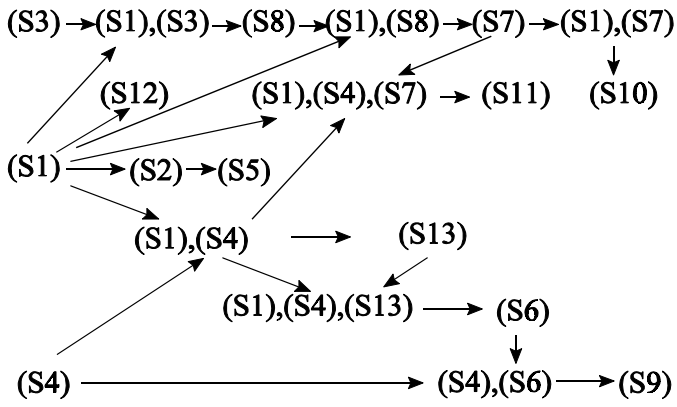
Mit (S 1) folgt daraus (S 11) nach Addition von f auf beiden Seiten der Glei-

chung.

Aus (S 1) und (S 4) folgt (S 13):

$$f \subseteq g \underset{(S4)}{\Rightarrow} f = g+o|D_f \underset{(S\ 1)}{=} g+o|D_g+o\ |D_f = f+o|D_g.$$

Wir erkennen, daß wir mit logischen Schlüssen bis auf (S 1), (S 3) und (S 4) alle anderen Aussagen gewinnen können. Allerdings haben wir daneben noch die Gesetze des teilweise geordneten Halbmoduls mit neutralem Element verwendet, ohne sie immer explizit anzugeben. Einen Überblick über die Zusammenhänge gibt die Skizze:



5. Ein Axiomensystem

Wir können erwarten, daß wir den Katalog (S 1), ..., (S 13) durch logische Ableitungen erhalten, wenn wir fordern:

(A 1) $(H,+,\leq)$ ist ein teilweise geordneter HaIbmodul mit neutralem Element 0.

(A 2) Zu jedem $a \in H$ gibt es ein 0_a mit der Eigenschaft:

$a + 0_a = a$ und aus $a + x = a$ folgt $0_a \leq x$.

(A3) $0_a + 0_b = 0_{a+b}$.

(A4) Wenn $a \leq b$, dann $a = b+0_a$

Die Schreibweise 0_a erscheint zunächst verfrüht; sie ist aber gerechtfertigt, denn es zeigt sich, daß 0_a eindeutig bestimmt ist.

Aus der Skizze können wir entnehmen, wie ein möglicher Aufbau der „Theorie“ aussehen kann. Ein Vorschlag:

Satz 1: $0_a \leq 0$ für alle $a \in H$. (S 2)

Satz 2: $a = b + 0_a \Rightarrow a \leq b$ (S 5)

Folgerung 1: $a \leq b \Leftrightarrow a = b+0_a$

Satz 3: $0_a+0_a=0_a$ (S 8)

Satz 4: $0_{0a} = 0_a$ (S 7)

Satz 5: $0_a+0_b = 0_a \Rightarrow 0_a \leq 0_b$ (S 10)

Satz 6: $a \leq b \Rightarrow a + 0_b = b + 0_a$ (S 13)

Satz 7: $a \leq b \Rightarrow 0_a \leq 0_b$ (S 6)

Satz 8: $0_a \leq 0_b \Rightarrow 0_a = 0_a+0_b$ (S 9)

Folgerung 2: $0_a \leq 0_b \Leftrightarrow 0_a = 0_a+0_b$

Satz 9: $0_a \leq b \Rightarrow a = a + b$ (S 11)

Satz 10: $a = a+b \Rightarrow 0_a \leq b$ (S12)

Folgerung 3: $0_a \leq b \Leftrightarrow a = a+b$

Damit ist aber keineswegs der Vorrat an Folgerungen erschöpft. Einige weitere

Beispiele: $a \leq 0_a \Rightarrow a = 0_a$;

$0_o = 0$;

$a+x = 0_a \Rightarrow 0_a \leq 0_x$;

$a+b = a \Leftrightarrow 0_a+b = 0_a$

6. Diskussion des Axiomensystems

Beim Aufstellen des Axiomensystems ergibt sich zwangsläufig die Frage, ob man nicht vielleicht Axiome sparen kann. Diese Frage ist allerdings erst vernünftig, wenn man das angegebene Axiomensystem in möglichst einfache Aussagen zerlegt hat. Das ist bei (A1) - (A4) keineswegs der Fall. So ist etwa (A1) eine Konjunktion mehrerer einfacher Aussagen. Wir spalten also zunächst auf Das ergibt:

H sei eine nicht leere Menge mit einer Verknüpfung + und einer Relation $\leq$ mit den Eigenschaften

(B l)	$(a + b) + c = a + (b + c)$	Assoziativgesetz
(B 2)	$a + b = b + a$	Kommutativgesetz
(B 3)	Es gibt ein $0 \in H$ mit $a + 0 = a$	Neutrales Element
(B 4)	$a \leq a$	Reflexivgesetz
(B 5)	$a \leq b$ und $b \leq a \Rightarrow a = b$	Antisymmetriegesetz
(B 6)	$a \leq b$ und $b \leq c \Rightarrow a \leq c$	Transitivgesetz
(B 7)	$a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c$	Monotoniegesetz

(B 8) Zu a existiert 0_a mit $a + 0_a = a$.

(B 9) $a + x = a \Rightarrow 0_a \leq x$

(B 10) $0_a + 0_b = 0_{a+b}$

(B 11) $a \leq b \Rightarrow a = b + 0_a$

Dieses Axiomensystem (B 1)-(B 11) liegt eigentlich unseren Betrachtungen zugrunde. Wir wollen untersuchen, ob es möglich ist, dies Axiomensystem zu reduzieren. Betrachten wir (B 11) und Satz 2, so haben wir insgesamt

$$a \leq b \Leftrightarrow a = b + 0_a.$$

Das legt den Versuch nahe, im Axiomensystem die Ordnungsrelation zu eliminieren durch Verwendung entsprechender Gleichungen. Das ist ein Verfahren, das in der Theorie der Ordnungsstrukturen häufig angewendet wird. Weiter bemerken wir, daß mit der eindeutigen Zuordnung von a zu 0_a eine Abbildung α von H in sich gegeben ist. Diese Versuche können zu folgendem Axiomensystem führen.

Sei A eine nicht leere Menge mit einer Verknüpfung + und einer Abbildung α von A in sich. Es mögen gelten

(F l)	$(a + b) + c = a + (b + c)$	Assoziativgesetz
(F 2)	$a + b = b + a$	Kommutativgesetz
(F 3)	Es gibt ein $0 \in A$ mit $a + 0 = a$.	Neutrales Element
(F 4)	$\alpha(a + b) = \alpha(a) + \alpha(b)$	Additionstreue
(F 5)	$a + \alpha(a) = a$	
(F 6)	$a + x = a \Rightarrow \alpha(\alpha(a)) + x = \alpha(a)$	

Ein solches Tripel $(A, +, \alpha)$ wollen wir F-Halbmodul nennen.

Wir sehen sofort, daß hier weniger Axiome vorliegen. Wir wollen zunächst

zeigen, daß diese Axiome unabhängig voneinander sind. Das geschieht durch die folgenden Beispiele.

(F 1): $A = \{a, b, c\}$, $\alpha(x) = x$

+	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	a
c	c	a	c

$(b + b) + c = a \neq b = b + (b + c)$

(F2): $A=\{a, b, c\}$, $\alpha(x)=x$

+	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	b
c	c	c	c

(F 3): $(\mathbb{N}, \sqcap)$, $\alpha(x) = x$. Dabei ist $a \sqcap b =_{def} \min(a, b)$.

(F4): $A = \{0, a, b, c, d, e, f, g\}$

$$\alpha(x) = \begin{cases} x \text{ für } x \in \{0, a, b, c, d\} \\ a \text{ für } x = e \\ b \text{ für } x = f \\ d \text{ für } x = g \end{cases}$$

+	0	a	b	c	d	e	f	g
0	0	a	b	c	d	e	f	g
a	a	a	c	c	d	e	g	g
b	b	c	b	c	d	c	f	g
c	c	c	c	c	d	c	g	g
d	d	d	d	d	d	d	g	g
e	e	e	c	c	d	a	g	g
f	f	g	f	g	g	g	d	d
g	g	g	g	g	g	g	d	d

$\alpha(e+f) = \alpha(g) = d$; $\alpha(e) + \alpha(f) = a+b = c \neq d$

(F5): $(\mathbb{N}_0,+)$, $\alpha(x)=x$

(F 6): $(\mathbb{N}_o, \sqcup)$, $\alpha(x) = 0$, dabei ist $a \sqcup b =_{def} \max(a, b)$.

Daß das Axiomensystem widerspruchsfrei ist, zeigt das Beispiel

$(\mathbb{N}_o,+, \alpha)$ mit $\alpha(x) = 0$.

Natürlich haben wir noch zu zeigen, daß sich das Axiomensystem (A 1) - (A 4) folgern läßt. Das soll weiter unten geschehen. Neben dem Einführungsbeispiel und dem eben genannten trivialen Beispiel ist allgemein jeder Halbverband mit neutralem Element und der Abbildung $\alpha(x) = x$ Modell des Axiomensystems. Damit hätte natürlich auch die Möglichkeit bestanden, nach der Betrachtung von F Ähnlichkeiten zu diesen Beispielen herauszuarbeiten und dann zu axiomatisieren.

7. Strukturbetrachtung

Wir fassen die wichtigsten Folgerungen aus (F l)-(F 6) zusammen.

Satz: Sei $(A,+,\alpha)$ ein F-Halbmodul, dann gilt

(1) $(\alpha(A), +)$ ist Durchschnittshalbverband mit größtem Element.

(2) Die Ordnung von $(\alpha(A),+)$ laßt sich so fortsetzen, daß $(A,+,\leq)$ ein teilweise geordneter Halbmodul und α ein ordnungstreuer Endomorphismus wird.

Beweis: (1): 0 ist Element von α (A), denn $0 + \alpha(0) = 0 = \alpha(0)$. Wir haben noch zu zeigen, daß das Idempotenzgesetz gilt. Aus $a + 0 = a$ folgt nach (F 6)

$$\alpha(\alpha(a)) = \alpha(\alpha(a)) + 0 = \alpha(a).$$

Damit ergibt (F 5)

$$\alpha(a)= \alpha(a) + \alpha(\alpha(a)) = \alpha(a) + \alpha(a)$$

(2): Mit

$$a \leq b \Leftrightarrow a =_{def} b + \alpha(a)$$

ist eine Ordnung von (A,+) gegeben, die die von $(\alpha(A),+)$ fortsetzt. Es gilt nämlich wegen (F 5) das Reflexivgesetz. Aus $a \leq b$ und $b \leq a$ folgt

$$a = b + \alpha(a) \text{ und } b = a + \alpha(b).$$

Daraus ergibt sich

$$a = a + \alpha(b) + \alpha(a) = a + \alpha(b) = b,$$

also das Antisymmetriegesetz.

Aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt

$$a = b + \alpha(a) \text{ und } b = c + \alpha(b).$$

Das ergibt

$$a = c + \alpha(b) + \alpha(a) = c + \alpha(b) + \alpha(\alpha(a)) = c + a(b+\alpha(a)) = c + \alpha(a).$$

Das liefert $a \leq c$, demnach gilt auch das Transitivgesetz.

Aus $a \leq b$ folgt $a = b + \alpha(a)$, daraus ergibt sich

$$a + c = b + c + \alpha(c) + \alpha(a) = b + c + \alpha(a + c),$$

daraus erhalten wir $a + c \leq b + c$, also das Monotoniegesetz.

Aus $\alpha(a) \leq \alpha(b)$ folgt

$$\alpha(a) = \alpha(b) + \alpha(\alpha(a)) = \alpha(b) + \alpha(a).$$

Das zeigt daß $\leq$ die Halbverbandsordnung von $(\alpha(A), +)$ fortsetzt.

Schließlich ist α ordnungstreu, denn aus $a \leq b$ folgt $a = b + \alpha(a)$, daraus folgt

$$\alpha(a) = \alpha(b+\alpha(a)) = \alpha(b)+\alpha(\alpha(a)).$$

Das liefert $\alpha(a) \leq \alpha(b)$.

Wir wollen noch einige Eigenschaften von α hervorheben, die sich unmittelbar ergeben.

Folgerung: Ist $(A,+,\alpha)$ ein F-Halbmodul, so gilt

(1) $\alpha(\alpha(a)) = \alpha(a)$.

(2) $\alpha(a)+\alpha(a)=\alpha(a)$.

Diese Ergebnisse zeigen uns insgesamt, daß sich (A 1) - (A4) aus (F 1) - (F 6) folgern lassen.

Wir wollen schließlich noch den Fall betrachten, bei dem $(A,+)$ selbst schon Halbverband ist.

Satz: In einem F-Halbmodul $(A,+,\alpha)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $(A,+)$ ist Halbverband.

(2) α ist die identische Abbildung.

(3) α ist surjektiv.

(4) α ist injektiv.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): Aus $a + a = a$ folgt nach (F 6) $\alpha(a) + a = \alpha(a)$. Nach (F 5) gilt aber $a + \alpha(a) = a$, also haben wir $\alpha(a) = a$.

(2) $\Rightarrow$ (3): klar.

(3) $\Rightarrow$ (4): Sei $a = \alpha(x)$ und $b = \alpha(y)$, dann folgt aus $\alpha(a) = \alpha(b)$

$$a = \alpha(x) = \alpha(\alpha(x)) = \alpha(a) = \alpha(b) = \alpha(\alpha(y)) = \alpha(y) = b.$$

(4) $\Rightarrow$ (1): Aus

$$\alpha(a + a) = \alpha(a) + \alpha(a) = \alpha(a)$$

folgt $a + a = a$.

Literatur

Kirsch, A., Die Anordnungseigenschaften der Zahlen als Gegenstand für Axiomatisierungsübungen, MPSB 13 (1966), 83-105