11. Einige neuere Beweismethoden in der Logik

In: D. Laugwitz (Hrsg.), Jahrbuch Überblicke der Mathematik 3 (1969), 97-111

Der Mathematiker bedient sich der Logik beim axiomatischen Aufbau einer mathematischen Theorie, um mit Hilfe logischer Regeln aus den Axiomen oder bereits bewiesenen Sätzen neue Sätze herzuleiten. Wegen dieser grundlegenden Bedeutung der Logik ist es verständlich, daß man nach einer ausreichenden Fundierung der mathematischen Logik suchte. Diese Bemühungen führten zu Kalkülen, die man wiederum als mathematische Theorien auffassen kann. Es handelt sich dabei um axiomatisch aufgebaute Theorien, die einen gewissen Bereich logischer Regeln erfassen. Aus der kaum übersehbaren Fülle inzwischen entwickelter Kalküle wollen wir einige Grundansätze herausschälen, die wegen der Methodik ihrer Beweise beachtenswert erscheinen. Für weitere Beispiele sei auf (GENTZEN 1934/35, HERMES 1963, KUTSCHERA 1967, LORENZ 1968, LORENZEN 1962 und SCHMIDT 1960) verwiesen. Wir wollen zunächst einen Kalkül skizzieren, an dem wir das Aufbauprinzip erläutern und Folgerungsbegriffe analysieren können.

1. Folgerungsbegriffe

Ein Kalkül hat zunächst das *Begriffsnetz* aufzubauen. Es ist bestimmt durch die Angabe der *Zeichen* und *Bildungsregeln*.

Zeichen:

(1) *Subjektsvariable*: x, y, z, ...

(2) *Aussagenvariable*: A, B, C....

(3) *Funktorenvariable*: f, g, h,...

(4) *Prädikatenvariable*: P, Q, R....

(5) *Klammern*: (,)

(6) *Junktoren*: $\neg$, $\rightarrow$

(7) *Quantor*: $\bigwedge$

(8) *Gleichheitssymbol*: =

Die Zeichen (,), $\neg$, $\rightarrow$, $\bigwedge$, = nennen wir *linke Klammer*, *rechte Klammer*, *Negator*, *Subjunktor*, *Generalisator* und *Gleichheitssymbol*.

Diese Bezeichnungen (abgesehen von „linke Klammer“, „rechte Klammer“) knüpfen an Vorstellungen an, die zu dieser Abstraktion geführt haben. Wir denken uns: Ein Subjekt ist ein Name für ein Ding, ein Prädikat ist ein Name für eine Eigenschaft, ein Funktor ein Name für eine Funktion. Eine Aussage ist ein sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch ist. Aussagen können verknüpft werden. $\neg$ bezeichnet die einstellige Verknüpfung, die einer Aussage ihre Negation zuordnet, $\rightarrow$ bezeichnet die zweistellige Verknüpfung, die zwei Aussagen diejenige Aussage zuordnet, die durch Verbindung zu „Wenn.... dann...“ entsteht. Der Generalisator $\bigwedge$ steht für die Redewendung „Für alle...“

Der axiomatische Aufbau einer mathematischen Theorie (z.B. der Gruppentheorie) kann als ökonomisches Arbeitsprinzip aufgefaßt werden, um nämlich gemeinsame Eigenschaften verschiedenartiger Gegenstandsbereiche (z.B. Zahlenmengen, Abbildungsmengen usw.) zu erfassen. Das ist durch die Verwendung von Variablen (z.B. für Verknüpfungen) möglich. Axiome und Sätze der Theorie werden dann nicht als Aussagen, sondern als *Aussageformen* betrachtet.

Deshalb ist es auch für die Logik zweckmäßig, statt mit Aussagen, Subjekten, Prädikaten und Funktoren mit Aussagenvariablen, Subjektsvariablen, Prädikatenvariablen und Funktorenvariablen zu arbeiten.

Bildungsregeln:

(1) *Terme*: Die Subjektsvariable x ist ein Term.

Mit $t_1, \ldots, t_n$ ist auch $f\, t_1 \ldots t_n$ ein Term ($n \geq 1$).

Wir verwenden dabei $t, t_1, t_2, \ldots$ als Variable für Terme. $ft_1 \ldots t_n$ wird gelesen: „f von t_1 bis t_n."

(2) *Ausdrücke*: $t_1 = t_2$ ist ein Ausdruck.

$Pt_1 \ldots t_n$ ist ein Ausdruck.

Mit α ist $\neg\alpha$ ein Ausdruck.

Mit α, β ist $(\alpha \rightarrow \beta)$ ein Ausdruck.

Mit α ist $\bigwedge x\, \alpha$ ein Ausdruck.

Hier verwenden wir $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ als Variable für Ausdrücke. $(\alpha \rightarrow \beta)$ wird gelesen: „wenn α, dann β". Statt $\bigwedge x\, \alpha$ schreiben wir $\bigwedge_x \alpha$. (Das wird gelesen: „für alle x: α".) Außerdem sind weitere Abkürzungen üblich:

$(\alpha \vee \beta)$ für $(\neg\, \alpha \rightarrow \beta)$,

$(\alpha \wedge \beta)$ für $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$,

$\bigvee_x \alpha$ für $\neg \bigwedge_x \neg\alpha$.

$(\alpha \vee \beta)$ wird gelesen: „α oder β", $(\alpha \wedge \beta)$ als „α oder β", $\bigvee_x \alpha$ als „für wenigstens ein x: α".

$\vee, \wedge, \bigvee$ heißen *Adjunktor*, *Konjunktor* und *Partikularisator*. $\rightarrow, \vee, \wedge$ heißen *Junktoren*, $\bigwedge$ und $\bigvee$ *Quantoren*. Um auszudrücken, daß die Subjektsvariable x in α auftritt, schreiben wir $\alpha[x]$.

Betrachten wir einmal

$$\bigwedge_x (fx \wedge gy).$$

In dem Ausdruck, auf den der Generalisator wirkt, treten die Subjektvariablen x und y auf. x ist durch den Generalisator „gebunden“, y dagegen nicht. y „kommt frei vor“.

Ersetzt man in einem Ausdruck $\alpha[x]$, in dem x frei vorkommt und nicht im Wirkungsbereich eines mit y gleichnamigen Quantors liegt, überall die Variable x durch die Variable y, so erhalten wir einen Ausdruck $\alpha[x/y]$.

Damit haben wir das Begriffsnetz des Kalküls gebracht. Das *Deduktionsgerüst* des Kalküls besteht aus den *Axiomen* und den *Deduktionsregeln*.

Axiome: (1) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))$

(2) $(((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)))$

(3) $((\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))$

(4) $(\bigwedge_x \alpha[x] \rightarrow \alpha[x/y])$,

falls es möglich ist, von $\alpha[x]$ zu $\alpha[x/y]$ überzugehen.

Eine Vorstellung von den Axiomen kann man erhalten, wenn man z. B. (1) als Strukturformel einer Aussage ansieht. Sie ist wahr unabhängig von der Wahrheit der Teilaussagen.

Deduktionsregeln:

(1) Von α, $(\alpha \rightarrow \beta)$ zu β.

(2) Von $(\alpha \rightarrow \beta[x])$ zu $(\alpha \rightarrow \bigwedge_x \beta[x])$,

falls x in α nicht und in β frei vorkommt.

(1) heißt *Ersetzungsregel*, (2) *Generalisierungsregel*. Beide Regeln werden in

mathematischen Beweisen häufig verwendet.

Auch bei einem axiomatischen Aufbau der Logik ergeben sich die Probleme, die von der Axiomatik der Mathematik her bekannt sind. Wir wollen hier darauf nicht näher eingehen. Nähere Ausführungen finden sich z. B. in (HERMES 1963).

Beim weiteren Aufbau des Kalküls geht man nun so vor, daß man die Deduktionsregeln auf die Axiome und auf bereits durch Anwendung der Deduktionsregeln auf Axiome entstandene Ausdrücke anwendet. Es entstehe z. B. eine Folge

$$\alpha_1, ..., \alpha_n, \alpha$$

Wir sagen, α ist im Kalkül ableitbar und nennen α eine *syntaktische Folgerung*. Wir schreiben

$$\vdash \alpha$$

Dabei ist $\vdash$ ein Symbol, das einer Sprache *über* den Kalkül angehört, der sogenannten *Metasprache*. Die im Begriffsnetz aufgeführten Zeichen gehören dagegen der *Objektsprache* an.

Die Folge $\alpha_1, ..., \alpha_n, \alpha$ wird als *Beweis* für α bezeichnet. Wir sprechen von einem syntaktischen Folgerungsbegriff, weil wir von möglichen Deutungen absehen und lediglich formal operieren.

Um einen syntaktischen Aufbau der Logik war man schon im Altertum bemüht, im Mittelalter betrachtete man dann die Logik von den Deutungen her. Dieser Prozeß wiederholte sich bis zu einem gewissen Grade beim Aufbau der mathematischen Logik in unserer Zeit. Zu Beginn der Untersuchungen in der Mitte des vorigen Jahrhunderts war die Logik in den Arbeiten von BOOLE, FREGE, PEIRCE, RUSSELL und WHITEHEAD stark syntaktisch ausgerichtet. Erst seit 1930 etwa, mit den Arbeiten von TARSKI, CARNAP, GENTZEN und GÖDEL war man um einen semantischen Aufbau bemüht. Eine ausführliche Darstellung der geschichtlichen Entwicklung gibt BOCHEŃSKI (1956).

Grundlegend für die Semantik sind die Begriffe des Individuenbereichs, der Interpretation, des Modells und des Geltens. Sie müssen deshalb bei einem semantischen Aufbau definiert werden.

Als Individuenbereich Ω ist jede nicht leere Menge zugelassen. Wir werden im folgenden n-stellige Funktionen über Ω und n-stellige Attribute über Ω betrachten. (Ein n-stelliges Attribut liegt vor, wenn für jedes Element eines n-tupels von Elementen aus Ω der Reihe nach feststeht, ob das Attribut zutrifft oder nicht. Es ist also im Prinzip eine Teilmenge von Ω^n.) Dabei ist zunächst $n \in N$. Um auch $n = 0$ zuzulassen, ist es sinnvoll, die Subjekte als nullstellige Funktionen und als nullstellige Attribute das Wahre (w) und das Falsche (f) zu nehmen.

Unter einer *Interpretation* über einem Individuenbereich Ω verstehen wir eine Abbildung I, die für alle Funktorenvariable und alle Prädikatenvariable definiert ist und für die gilt:

Das Bild einer n-stelligen Funktorenvariable ist eine n-stellige Funktion über Ω,

das Bild einer n-stelligen Prädikatenvariable ist ein n-stelliges Attribut über Ω.

Für eine Aussagenvariable (als nullstellige Prädikatenvariable) A gilt also

$$I(A) \in \{w, f\}.$$

Für einen Term t ist I(t) bisher nur erklärt, falls t Subjektsvariable ist. Allgemein definieren wir:

$$I(ft_1 \ldots t_n) = I(f)((I(t_1), \ldots , I(t_n).$$

Bevor wir den semantischen Folgerungsbegriff definieren, wollen wir uns an einem sehr durchsichtigen Sonderfall die Verhältnisse klarmachen.

Betrachten wir einmal als Grundbegriffe nur

Aussagenvariable, Klammern und Junktoren,

als Bildungsregeln lassen wir nur zu:

Aussagenvariable sind Ausdrücke,

mit α ist auch $\neg\alpha$ Ausdruck,

mit α und β ist $(\alpha \rightarrow \beta)$ Ausdruck.

Wir nehmen als Axiome nur (1), (2), (3) und als Deduktionsregel nur (1). Das ergibt einen Teilkalkül, den sogenannten klassischen *Aussagenkalkül*.

Wenn wir festsetzen

$$I(\neg\alpha) = \begin{cases} w, & \text{falls } I(\alpha) = f, \\ f, & \text{falls } I(\alpha) = w, \end{cases}$$

$$I((\alpha \rightarrow \beta)) = \begin{cases} f, & \text{falls } I(\alpha) = w \text{ und } I(\beta) = f, \\ w & \text{sonst}, \end{cases}$$

dann werden alle Axiome auf w abgebildet bei *jeder* Interpretation.

Bereits im Altertum findet sich bei PHILON dafür eine übersichtliche Schreibweise in Form von Wahrheitstafeln, die später von FREGE und PEIRCE systematisch verwendet wurden. Wir betrachten Axiom (1). Alle möglichen Interpretationen finden wir in folgender Tafel:

α	β	$(\beta \rightarrow \alpha)$	$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))$
w	w	w	w
w	f	w	w
f	w	f	w
f	f	w	w

Also gilt $I((\alpha \to (\beta \to \alpha))) = w$ für alle Interpretationen I. Es liegt nun nahe, alle Ausdrücke, die diese Eigenschaft haben, als Folgerungen anzusprechen, genauer als semantische Folgerungen der Aussagenlogik. Eine solche Folgerung ist z. B. $((\alpha \wedge (\alpha \to \beta)) \to \beta)$. Wir führen dafür den Beweis mit Hilfe einer Wahrheitstafel in etwas abgewandelter Form:

$((\alpha$	$\wedge$	$(\alpha$	$\to$	$\beta))$	$\to$	$\beta)$
w	w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	f	w	f
f	f	f	w	w	w	w
f	f	f	w	f	w	f
1.	2.	3.	5.	6.	7.	8.

Wir füllen zunächst die 1. und 3., 5. und 7. Spalte aus. Durch Kombination der 3. und 5. Spalte ergibt sich die 4., durch Kombination der 1. und 4. die 2., durch Kombination der 2. und 7. die 6. In ihr stehen lauter w, also wird der Ausdruck bei jeder Interpretation auf w abgebildet, er ist also eine aussagenlogische semantische Folgerung. Dabei haben wir außerdem benutzt

$$I(\alpha \wedge \beta) = \begin{cases} w, & \text{falls } I(\alpha) = w \text{ und } I(\beta) = w, \\ f & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist natürlich nicht zu erwarten, daß wir für beliebige Individuenbereiche auch für die Semantik der Prädikatenlogik ein so einfaches Beweisverfahren erhalten werden. Dieser Sonderfall zeigt uns aber, wie es möglich ist, auch für die Prädikatenlogik einen semantischen Folgerungsbegriff zu definieren.

Dazu definieren wir zunächst, was es heißen soll, daß ein Ausdruck α *bei einer Interpretation* I *über* Ω *gilt.* Dafür sagt man auch, I *ist ein Modell von* α *über* Ω.

Wir formulieren jetzt etwas abgekürzt (ohne Mißverständnisse befürchten zu müssen):

(1) $Pt_1 \ldots t_n$ gilt genau dann, wenn $I(P)$ zutrifft auf $I(t_1),\ldots,I(t_n)$.

(2) $t_1 = t_2$ gilt genau dann, wenn $I(t_1) = I(t_2)$.

(3) $\neg\alpha$ gilt genau dann, wenn α nicht gilt.

(4) $(\alpha \rightarrow \beta)$ gilt genau dann, wenn mit α auch β gilt .

(5) $\bigwedge_x \alpha$ Gilt genau dann, wenn α für jede Interpretation I_X mit $I_X(x) = X \in \Omega$ und $I_X = I$ in allen anderen Fällen.

Damit können wir jetzt definieren:

> $\Vdash \alpha$ genau dann, wenn α bei jeder Interpretation I über Ω gilt. α heißt *semantische Folgerung*.

Offensichtlich verallgemeinert das den bei der Aussagenlogik behandelten semantischen Folgerungsbegriff.

Damit haben wir also zwei verschiedene Folgerungsbegriffe. Das mag für den Mathematiker zunächst unbefriedigend erscheinen. Es zeigt sich aber, daß beide äquivalent sind. Genauer gilt folgendes

Metatheorem: (1) Wenn $\vdash \alpha$, dann $\Vdash \alpha$,

(2) wenn $\Vdash \alpha$, dann $\vdash \alpha$.

Es handelt sich um einen Satz der Metasprache, denn hier wird eine Aussage gemacht über objektsprachliche Sätze. (1) drückt die *Korrektheit* des Prädikatenkalküls, (2) seine *Vollständigkeit* aus.

Für den Prädikatenkalkül gab zuerst FREGE ein Regelsystem an, von dem RUSSELL nachweisen konnte, daß es inkorrekt war. RUSSELL und WHITEHEAD gaben dann 1910/1913 einen korrekten Kalkül an und erbrachten auch den Korrektheitsbeweis. Erst 1930 gelang GÖDEL der Nachweis der Vollständig-

keit eines Prädikatenkalküls (erster Stufe).

Für unseren Prädikatenkalkül sind also der syntaktische und der semantische Folgerungsbegriff äquivalent.

2. Beweisverfahren

Wir hatten bereits beim syntaktischen Folgerungsbegriff gesehen, wie ein Beweis zustande kommt. Durch Anwendung der Deduktionsregeln auf Axiome oder bereits bewiesene Sätze ergibt sich eine Kette von Ausdrücken, die schließlich zur Behauptung führt. Es ist das klassische Verfahren der axiomatischen Methode, das allerdings in der Logik weitgehend formalisiert und mechanisiert wird. Das soll schon durch den Begriff „Kalkül“ ausgedrückt werden, der an die Vorstellungen der calculi, d.h. der Steinchen, anknüpft, mit denen man auf dem Rechenbrett addierte. Wir wollen einen solchen Beweis als Deduktion bezeichnen.

Die eigentliche Schwierigkeit beim Finden eines Beweises entsteht dadurch, daß man nach jedem Schritt überlegen muß, welche Regel man worauf anwenden muß, um zu einem Beweis eines vorgelegten Ausdrucks zu gelangen. Diese Schwierigkeit besteht nicht in der Aussagenlogik bei den semantischen Beweisen mit Hilfe der *Wahrheitstafeln.* Wie wir an unserem obigen Beispiel gesehen haben, ist es immer möglich, in endlich vielen Schritten zu entscheiden, ob ein Ausdruck eine Folgerung ist oder nicht. Diese Methode läßt sich im allgemeinen natürlich nicht direkt auf die Prädikatenlogik anwenden. Es gibt aber eine reizvolle Variante des Verfahrens, die verallgemeinerungsfähig ist.

In vielen Fällen ist es möglich, mit Hilfe einer verkürzten *Wahrheitstafel* einen semantischen Beweis zu führen. Betrachten wir dazu wieder den Ausdruck

$$((\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \beta).$$

Wir waren oben so vorgegangen, daß wir alle möglichen Interpretationen untersuchten.

Wir können nun umgekehrt fragen, ob es eine Interpretation gibt, die den Ausdruck auf f abbildet. Sei I eine solche Interpretation. Dann müßte aber gelten

$$I((\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) = w \text{ und } I(\beta) = f.$$

$(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta))$ wird genau dann auf w abgebildet, wenn

$$I(\alpha) = w \text{ und } I((\alpha \rightarrow \beta)) = w$$

ist. Da $I(\alpha) = w$ und $I((\alpha \rightarrow \beta)) = w$ ist, müßte sein $I(\beta) = w$.

I müßte also β auf w und f abbilden, das ist nicht möglich. Folglich muß der Ausdruck bei jeder Interpretation auf w abgebildet werden. Diese Überlegungen lassen sich in eine kurze Tabelle bringen:

$((\alpha$	$\wedge$	$(\alpha$	$\rightarrow$	$\beta))$	$\rightarrow$	$\beta)$
w	w	w	w	w	f	f
				f		

Das Verfahren findet sich in zahlreichen Lehrbüchern. 1955 erkannte BETH und unabhängig von ihm HINTIKKA, daß es möglich sein müßte, dies Verfahren zum Aufbau eines Prädikatenkalküls zu benutzen, der dann einen neuen semantischen Folgerungsbegriff und eine neue Beweismethode liefern würde.

BETH hat dies Programm durchgeführt, indem er *semantische Tableaus* verwendet. Er schreibt in die rechte Spalte eines zweispaltigen Tableaus alle Ausdrücke, die ungültig sein sollen, und in die linke Spalte alle gültigen.

Will man z.B. beweisen, daß ein Ausdruck eine Folgerung ist, so schreibt man ihn in die rechte Spalte. Wählen wir wieder das Beispiel $((\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \beta)$.

gültig	ungültig
$(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta))$	$(((\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \beta)$
α	β
$(\alpha \rightarrow \beta)$	
β	

Wieder schließen wir wie eben, daß nur dann $(((\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \beta)$ ungültig sein kann, wenn $((\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta))$ gültig und β ungültig ist. In die linke Spalte wird also $((\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta))$ geschrieben, β in die rechte. $((\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta))$ ist genau dann gültig, wenn α und $(\alpha \rightarrow \beta)$ beide gültig sind. Sie werden also untereinander in die linke Spalte geschrieben. Da α und $(\alpha \rightarrow \beta)$ links stehen, muß auch β links stehen, das ist aber ein Widerspruch, denn β kann nicht zugleich gültig und ungültig sein. Das Tableau *schließt*, es werden zwei waagerechte Linien gezogen, um das anzudeuten.

Wir haben eben das Beispiel mit unseren bisherigen Kenntnissen am Tableau behandelt. Ein systematischer Aufbau muß das Arbeiten am Tableau unabhängig von solchen Überlegungen regeln. Wir wollen nun zeigen, wie sich damit ein neuer semantischer Folgerungsbegriff gewinnen läßt. Dazu erläutern wir, wie grundlegende Ausdrücke im Tableau behandelt werden.

Steht $\neg\alpha$ in der linken Spalte, so wird α in die rechte geschrieben.

gültig	ungültig
.	.
$\neg\alpha$	α
.	.

Steht $\neg\alpha$ in der rechten, so wird α in die linke geschrieben:

gültig	ungültig
.	.
α	$\neg\alpha$
.	.

Steht $(\alpha \wedge \beta)$ in der linken Spalte, so schreibt man α und β untereinander in die linke Spalte.

gültig	ungültig
.	.
$(\alpha \wedge \beta)$	.
α	.
β	.
.	.

Steht $(\alpha \wedge \beta)$ dagegen in der rechten Spalte, so spaltet sich das Tableau auf. In die linke Spalte rechts wird α, in die rechte Spalte rechts wird β geschrieben.

gültig		ungültig	
.		.	
.		$(\alpha \wedge \beta)$	
.	.	α	β
.	.	.	.

Entsprechend:

gültig		ungültig	
.		.	
$(\alpha \vee \beta)$			
α	β	.	.
.	.	.	.

und

gültig	ungültig
.	.
.	$(\alpha \vee \beta)$
.	α
.	β
.	.

Für die Subjunktion erhält man:

gültig		ungültig	
.		.	
$(\alpha \rightarrow \beta)$			
β	.	.	α
.	.	.	.

bzw.

gültig	ungültig
.	.
.	$(\alpha \rightarrow \beta)$
α	β
.	.

Auch die Quantoren lassen sich behandeln. Für den Generalisator gilt:

gültig	ungültig
.	.
$\bigwedge_x \alpha[x]$	.
$\alpha[x/y]$	.
.	.

bzw.

gültig	ungültig
.	.
.	$\bigwedge_x \alpha[x]$
.	$\alpha[x/y]$
.	.

Für den Partikularisator erhält man:

gültig	ungültig
.	.
$\bigvee_x \alpha[x]$	.
$\alpha[x/y]$	.
.	.

bzw.

gültig	ungültig
.	.
.	$\bigvee_x \alpha[x]$
.	$\alpha[x/y]$
.	.

Als Beispiel eines Beweises für einen Ausdruck mit Quantoren bringen wir:

$$(\neg \bigwedge_x \alpha[x] \rightarrow \bigvee_x \neg\alpha[x])$$

gültig	ungültig
.	$(\neg \bigwedge_x \alpha[x] \rightarrow \bigvee_x \neg\alpha[x])$
$\neg \bigwedge_x \alpha[x]$	$\bigvee_x \neg\alpha[x])$
.	$\bigwedge_x \alpha[x]$
.	$\alpha[x/y]$
$\alpha[x/y]$	$\neg\alpha[x/y]$

Es ist sinnvoll, folgenden Folgerungsbegriff zu definieren $\Vdash$ genau dann, wenn für x ein geschlossenes Tableau existiert. Wie BETH zeigen konnte, gilt das

Metatheorem

$\Vdash\alpha$ genau dann, wenn $\vdash\alpha$.

Die Idee des Beweises für „Wenn $\Vdash\alpha$, dann $\vdash\alpha$“ ist beachtenswert. BETH entdeckte, daß man das Tableau nur von links oben nach unten und von rechts unten nach rechts oben zu durchlaufen brauche, um eine Ableitung im Prädikatenkalkül zu erhalten.

Die Idee von BETH ist 1958 von LORENZEN (1958) aufgegriffen und umfunktioniert worden. Ihm ging es um einen möglichst natürlichen und zwangsläufigen Zugang zur intuitionistischen Logik. Es wird ein Spiel zwischen zwei Kontrahenten, Proponent und Opponent, um den behaupteten Ausdruck geführt. Es entsteht ein Dialog. Wir erläutern die Methode an unserem bereits mehrfach behandelten Beispiel.

Der Proponent behauptet $(((\alpha \wedge (\alpha\rightarrow\beta))\rightarrow\beta)$. Das greift der Opponent an, indem er seinerseits $((\alpha \wedge (\alpha\rightarrow\beta))$ behauptet. Der Proponent hat nun zwei Möglichkeiten. Er kann sich verteidigen oder zum Gegenangriff gegen die Behauptung

des Opponenten übergehen, bleibt darin allerdings die Verteidigung schuldig. In unserem Fall ist es zweckmäßig, sich zunächst mit β zu verteidigen. Das greift der Opponent an. Darauf weicht zunächst der Proponent auf einen Angriff gegen $(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta))$ aus, indem er α angreift. Der Opponent möge sich verteidigen mit α. Nun greift der Proponent den zweiten Teil der Konjunktion an. Der Opponent verteidigt sich mit $(\alpha \rightarrow \beta)$. Das greift der Proponent mit α an, der Opponent verteidigt sich mit β. Nun kann der Proponent getrost β behaupten, denn der Opponent hat es vor ihm behauptet. Er aber kommt damit seiner Verteidigungspflicht nach. Der Dialog ist gewonnen. Er ist offensichtlich so geführt worden, daß der Proponent immer mit den für ihn schlimmsten Reaktionen des Opponenten rechnete. Er hat also eine *Gewinnstrategie*. Folgendes Tableau gibt den Spielverlauf wieder:

O	P
$(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta))$	$((\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \beta)$
?	β
α	? 1
$(\alpha \rightarrow \beta)$	?2
β	α
	β

LORENZEN definiert damit einen weiteren Folgerungsbegriff:

> $_{IV}\!-\ \alpha$ genau dann, wenn der Proponent eine Gewinnstrategie für α besitzt.

LORENZEN zeigt ähnlich wie BETH das

Metatheorem: Wenn $_{IV}\!-\ \alpha$, dann α.

Die Umkehrung gilt jedoch nicht. Ein einfaches Gegenbeispiel ist der Ausdruck $(\alpha \vee \neg\alpha)$, der im Prädikatenkalkül ableitbar ist, für den der Proponent aber keine Gewinnstrategie besitzt:

O		P	
?		$(\alpha \vee \neg\alpha)$	
?	α	α	$\neg\alpha$
			?

Der Proponent kann hier nicht unabhängig vom Wahrheitswert von α gewinnen.

Das ist natürlich von LORENZEN gerade beabsichtigt, denn es handelt sich hier um das *tertium non datur*, das die Intuitionisten vermeiden wollen. Tatsächlich läßt sich zeigen, daß der Folgerungsbegriff von LORENZEN äquivalent ist zum Folgerungsbegriff des intuitionistischen Heyting-Kalküls (LORENZEN 1962).

Ähnlich wie bei den semantischen Tableaus werden auch hier Angriffs- und Verteidigungsregeln anzugeben sein. Wir wollen sie kurz darstellen:

Ausdruck	Angriff	Verteidigung
$\neg\alpha$	α	
$(\alpha \wedge \beta)$	? 1	α
	? 2	β
$(\alpha \vee \beta)$	?	α
		β
$(\alpha \rightarrow \beta)$	α	β
$\bigwedge_x \alpha[x]$	? y	$\alpha[x/y]$
$\bigvee_x \alpha[x]$	?	$\alpha[x/y]$

Daneben gibt es noch Spielregeln, die feststellen, wann und wie oft eine Behauptung angegriffen werden darf. LORENZEN benutzt z.B. die Regel, daß der Opponent nur die letzte Behauptung des Proponenten angreifen darf, der Proponent jedoch jede Behauptung des Opponenten. LORENZ hat 1968 mehrere verschiedene Regelsysteme erprobt und die sich ergebende Kalküle untersucht. Man kann – etwas vereinfacht – zum klassischen Prädikatenkalkül gelangen, wenn man definiert:

$_{V}\!-\alpha$ genau dann, wenn der Opponent keine Gewinnstrategie besitzt.

Offensichtlich gilt nach obigem Dialog $_{V}\!-(\alpha \vee \neg\alpha)$.

3. Diskussion der Verfahren

Man mag die Verschiedenheit der Methoden für belanglos halten, da sie doch äquivalent sind. Andererseits können bei anderen als logischen Kriterien die Methoden durchaus unterschiedlich bewertet werden. Z.B. sind vom psycholo-

gischen Standpunkt her Deduktionen für den Lernenden ziemlich unbefriedigend, da sie ein blindes Nachvollziehen der Schlüsse erfordern. Die Verhältnisse sind bei den semantischen Tableaus durchschaubarer, da hier der Lernende sich selbst einen Überblick über die Möglichkeiten des Hantierens mit Ausdrücken verschaffen kann. Kompliziert aufgebaute Ausdrücke werden schrittweise abgebaut; wenn auch Tableauaufspaltungen zu einer Ausweitung führen, so werden doch gleichzeitig die Ausdrücke immer einfacher. Dem Lernenden erschließt sich dabei ein „Baum“ von Ausdrücken. (auch das wurde von BETH systematisch untersucht.) Das gilt auch für die Dialoge. Sie liefern außerdem noch den Anreiz, eine Gewinnstrategie zu suchen. Hier liegt die Möglichkeit einer natürlichen Motivation des Beweisens. Sie kann in der Schule von großer Wichtigkeit sein. Außerdem können Dialoge eine Gewinnstrategie des Proponenten sichtbar werden lassen, ohne daß diese notwendigerweise formalisiert sein muß. Darin liegt die Möglichkeit, die Abstraktionsebene zu variieren. Auch das ist ein wertvolles methodisches Hilfsmittel. Es erscheint also durchaus reizvoll, anhand von Dialogen eine Konzeption des Beweisenlehrens für die Schule zu entwickeln.

4. Literaturverzeichnis

Beth, E. W.: Semantic entailment and formal derivability, Mededelingen der Kon. Nederl. Akad. van Wet., ns. 18 (1955), 309-342.

Bocheński, I. M.: Formale Logik, Freiburg 1956.

Gentzen, G.: Untersuchungen über das logische Schließen, Mathematische Zeitschrift 39 (1934/35), 176-210, 405-431.

Gödel, K.: Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, Monatshefte f. Math. u. Phys. 37 (1930), 349-360.

Hermes, H.: Einführung in die mathematische Logik, Stuttgart 1963.

Hintikka, K. J. J.: Two papers on symbolic logic, Acta philos. Fennica 8 (1955), 7-55.

Kutschera, F. v.: Elementare Logik, Wien 1967.

Lorenz, K.: Dialogspiele als semantische Grundlage von Logikkalkülen, Archiv f. mathem. Log. u. Grundl. 11 (1968), 32-55, 73-100.

Lorenzen, P.: Logik und Agon, in: Atti del XII Congresso Internazionale di Filosofia (Venedig 1958), Firenze 1958f.

Lorenzen, P.: Metamathematik, Mannheim 1962.

Schmidt, H. A.: Mathematische Gesetze der Logik I., Vorlesungen über Aussagenlogik, Berlin 1960.

Whitehead, A. N. und Russell, B.: Principia Mathematica, 3 Bde., Cambridge 1925-1937. Neudruck 1950.