10. Dialogisches Lehren von Beweisen

Die Schulwarte 22 (1968), 765-771

In einer axiomatisch aufgebauten mathematischen Theorie haben Beweise die Funktion, die Wahrheit mathematischer Aussagen zu sichern. Ein Beweis entsteht, wenn man logische Regeln auf Axiome oder bereits bewiesene Sätze so anwendet, daß sich schließlich der behauptete Satz ergibt. Das ist leichter gesagt als getan, ja es macht vielleicht den besonderen Reiz mathematischen Arbeitens aus, daß sich sogar elementar formulierbare Behauptungen manchmal nur schwer, etliche bisher überhaupt nicht beweisen lassen. So steht beim mathematischen Arbeiten das Suchen nach Beweisen meist im Vordergrund.

Für die Mitteilung von Mathematik behauptet sich, zwar immer wieder angefochten, der zuerst von EUKLID praktizierte global axiomatische Aufbau. Obwohl er zum Verständnis angeblich nur gesunden Menschenverstand voraussetzt, zeigen sich erfahrungsgemäß immer wieder Schwierigkeiten, wenn sich Lernende in eine so aufgebaute Theorie einarbeiten wollen. Durch die Untersuchungen von WERTHEIMER weiß man, daß sie meist dadurch entstehen, daß dem Lernenden ein blinder Nachvollzug der einzelnen Schritte zugemutet wird. Gute Lehrbücher helfen diesem Mangel ab, indem sie die Begriffsbildungen und Fragestellungen motivieren und immer wieder die einzelnen Gedankenschritte im Hinblick auf das Ziel erläutern.

Aber selbst dies Arbeiten setzt psychologische Gegebenheiten voraus, die noch nicht in jeder Altersstufe vorhanden sind. Ein verantwortungsbewußter Lehrer hat diese psychologischen Bedingungen zu berücksichtigen. Es entsteht dann freilich für ihn das Problem, inwieweit unter diesen Voraussetzungen Mathematik überhaupt möglich ist. In bezug auf das Beweisen hat in der Vergangenheit die Schule weitgehend kapituliert, indem sie auf diese verzichtete. Wir wollen untersuchen, ob das wirklich nötig ist. Dazu wollen wir zunächst die beim Beweisen auftretenden Schwierigkeiten betrachten.

Da ist zunächst das Problem der *Motivation*. Viele mathematische Aussagen sind anschaulich so klar, daß Beweisversuche des Lehrers auf Unverständnis stoßen. Auch ein Hinweis auf das Wahrheitsproblem hilft nach meinen Erfahrungen wenig, denn es stellt sich hier dem Schüler gar nicht. In der Grundschule und der Unterstufe der weiterführenden Schulen ist für die Schüler weitgehend die Anschauung Fundament ihrer Einsicht.

Man könnte es nun damit versuchen, gewisse logische Abhängigkeiten zu zeigen. Das setzt aber ein „*Bewußtsein von der Hierarchie der Einsichten*“ (WITTENBERG) voraus, das langsam wachsen muß.

Jeder Beweis erfordert eine *Forma1isierung*. In der Mathematik bedient man sich dazu gewisser Variablen und Zeichen. Bereits der herkömmliche Algebraunterricht, der im wesentlichen nur mit Subjektvariablen arbeitet, hat ziemliche Schwierigkeiten beim Einprägen der Regeln zu überwinden. In der Grund- und Hauptschule hat man bisher selbst darauf meist verzichtet, da man die psychologischen Schwierigkeiten für zu groß hielt.

Die bisher ungelösten mathematischen Probleme zeigen, daß es keineswegs trivial ist, mathematische Beweise zu geben. Viele Beweise erfordern eine Idee. Es ist damit das Problem des *Findens* angesprochen. Bemühungen zu einer systematischen Theorie des Findens sind in den Untersuchungen von POLYA zur Heuristik gegeben.

Das Beweisen erfordert eine *Kenntnis 1ogischer Rege1n*. Sie muß erst erworben werden. Es zeigt sich aber, daß Kinder schon sehr früh logisch richtig operieren, wenn sie dazu herausgefordert werden.

Wenn man nun die Versuche der Lehrbücher betrachtet, so hat man den Eindruck, daß die Autoren gelegentlich Beweise einstreuen, um ihr mathematisches Gewissen zu beruhigen, daß aber eine klare Konzeption des Beweisenlehrens fehlt.

Es soll hier versucht werden, ein solches Konzept zu entwickeln. Es gründet sich auf den in der Mathematik verwendeten *Dia1ogen* von P. LORENZEN und K. LORENZ.

Es werden Dialoge um mathematische Aussagen von zwei Partnern, dem *Proponenten* und dem *Opponenten*, geführt. Der Dialog beginnt mit einer Behauptung des Proponenten, die vom Opponenten angegriffen wird. Der Proponent kann sich nun verteidigen oder zum Gegenangriff übergehen. Der Dialog ist vom Proponenten gewonnen, wenn er sich verteidigen kann. Natürlich bestehen in der Regel zahlreiche Möglichkeiten, einen Dialog um eine Aussage zu führen. Wenn der Proponent jeden Dialog um eine Aussage gewinnen kann, wenn er also eine *Gewinnstrategie* besitzt, so soll die Aussage als bewiesen angesehen werden. Der Beweis kann damit motiviert werden als Gewinnstrategie in einem Dialog. Diese Motivation ist für die Schüler in der Regel natürlicher als die über das Wahrheitsproblem. Denn der Schüler steht häufig in Situationen, die es für ihn wünschenswert erscheinen lassen, eine Gewinnstrategie zu besitzen. Man denke nur an Diskussionen mit Eltern, Lehrern, Polizisten usw., an Wettkämpfe oder Glücksspiele.

Als Beispiel betrachten wir die Aussage:

> *Jede ungerade Zahl laßt sich als Differenz aufeinanderfolgender Quadratzahlen schreiben*.

Der Opponent bezweifelt diese Aussage des Proponenten, indem er z. B. die ungerade Zahl 7 vorlegt. Der Proponent verteidigt die Aussage gegen diesen Angriff, indem er zeigt:

$$7 = 16 - 9 = 4^2 - 3^2.$$

Er hat damit den Dialog gewonnen. Es werden nun einige Dialoge dieser Art geführt, bis sichtbar ist, daß der Proponent eine Gewinnstrategie besitzt, daß er nämlich bei einer vorgelegten ungeraden Zahl stets die beiden fraglichen aufeinanderfolgenden Quadratzahlen angeben kann. Er kann das z. B. dadurch sichtbar werden lassen, daß er schreibt:

$$9 = \left(\frac{9+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{9-1}{2}\right)^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16.$$

Die Spielstande werden zweckmäßigerweise in einem Tableau notiert:

O	P
? 7	Jede ungerade Zahl laßt sich als Differenz aufeinanderfolgender Quadratzahlen schreiben $7 = 16 - 9 = 4^2 - 3^2$
? 9	$9 = 25 - 16 = 5^2 - 4^2 = \left(\frac{9+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{9-1}{2}\right)^2$
? k, k ungerade	$\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{k+1}{2} + \frac{k-1}{2}\right)^2 \left(\frac{k+1}{2} - \frac{k-1}{2}\right)^2$ $= k \cdot 1 = k$

Wir haben im dritten Dialog formal argumentiert und uns damit klargemacht, daß der Proponent eine Gewinnstrategie finden kann. Diese braucht er an sich dem Opponenten nicht zu verraten. In der Renaissance versuchten aus Prioritätsgründen Mathematiker einerseits zu zeigen, daß sie z.B. für das Lösen von bestimmten Gleichungstypen Gewinnstrategien besaßen, andererseits aber gerade diese Gewinnstrategien zu verschleiern. Diese Skala der Möglichkeiten ist natürlich auch im Unterricht gegeben und gestattet reizvolle Varianten des Spiels. Alle Dialogspiele sollten aber schließlich doch zu einer Betrachtung der Strategien führen, denn erst eine Gewinnstrategie stellt einen Beweis dar.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, darzustellen, ob eine Gewinnstrategie vorhanden ist. Betrachten wir einmal folgendes Tableau:

O	P
	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$
$? \frac{2}{3}, \frac{5}{7}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21}; \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{21}$
$? \frac{2}{3}, \frac{5}{7}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{5 \cdot 2}{7 \cdot 3} = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3}$
$? \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{c \cdot a}{d \cdot b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$

Der erste Dialog wird *b1ind konkret* geführt. Der Proponent hat keine Gewinnstrategie, denn mit dem Ausrechnen kann er Glück oder Pech haben. Im zweiten Dialog dagegen wird eine Gewinnstrategie sichtbar, der Dialog wird *produktiv konkret* geführt. Der dritte Dialog spielt sich *produktiv forma1* ab. Wir haben damit die Möglichkeit, die Nachweisebene zu variieren. Diese *Variation der Nachweisebene* gibt dem Lehrer als Opponenten die Möglichkeit, das Abstraktionsniveau dem psychologischen Entwicklungsstand der Schüler anzupassen. Es ist mathematisch durchaus zu vertreten, sich mit einer niedrigeren Abstraktionsstufe zu beschränken.

Es ist also bereits ein Beweis gegeben, wenn die Schüler als Proponenten sagen können, nach welcher Strategie sie arbeiten. Es muß lediglich die Einsicht vorhanden sein, daß es sich um eine Methode handelt, die bei allen Dialogen um diese Aussage zu einem Gewinn führt. Das Formalisierungsproblem löst sich auf diese Weise, indem der Lehrer sich dem Entwicklungsstand der Schüler anpassen kann. Mit zunehmendem Abstraktionsvermögen sollte sich das Beweisen dann von den Dialogen lösen, um zu der heute üblichen Form zu gelangen. Für die Grund- und Hauptschule erscheint es dagegen sinnvoll, sich mit einer niedrigeren Abstraktionsstufe zu begnügen.

Unser Beispiel zeigt uns auch, daß bei den Dialogen Gebrauch gemacht wird von bereits bewiesenen Regeln (Hier Kommutativitat der Multiplikation natürlicher Zahlen). Hier kann eine Hierarchie der Einsichten geschaffen werden, ja sie ist notwendige Voraussetzung zum Bewußtmachen einer Gewinnstrategie.

Nach meinen Erfahrungen im Unterricht stellen die Dialoge eine starke Herausforderung zu selbständigem Arbeiten dar. Sie erleichtern das Finden von Beweisen und regen häufig zu verschiedenen Beweisen an. Ein Beispiel aus der Potenzrechnung, das ich in einer 10. Klasse eines Aufbaugymnasiums gewonnen habe, möge das erläutern. Als Basis hatten wir:

$$a^1 = a;\ \ a^n a = a^{n+1};\ \ a^n = a\cdot \ldots \cdot a,\ (n \text{ Faktoren});\ \ a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

O	P
	$a^n b^n = (ab)^n$
? 2	$a^2 b^2 = (aa)(bb) = (ab)(ab) = (ab)^2$
? 3	$a^3 b^3 = (aaa)(bbb) = (ab)(ab)(ab) = (ab)^3$
	$a^3 b^3 = (a^2 a)(b^2 b) = (a^2 b^2)(ab) = (ab)^3$

Die Schüler hatten bereits erkannt, daß es auf die Variable n ankommt. Im zweiten Dialog gab es immerhin schon zwei Gewinnstrategien.

Der Fall $n = 4$ sei überschlagen. Betrachten wir den Fall $n = 5$:

O	P
? 5	$a^5 b^5 = (aaaaa)(bbbbb) = (ab)(ab)(ab)(ab)(ab) = (ab)^5$
	$a^5 b^5 = (a^4 a)(b^4 b) = (a^4 b^4)(ab) = (ab)^4 (ab) = (ab)^5$
	$a^5 b^5 = (a^3 a^2)(b^3 b^2) = (a^3 b^3)(a^2 b^2) = (ab)^3 (ab)^2 = (ab)^5$

Hier arbeiteten die Schüler als Proponenten noch drei Strategien. Eine Diskussion ergab, daß die ersten beiden Gewinnstrategien sind, während nur für gewisse n die dritte ebenfalls Gewinnstrategie ist. Bei der Diskussion bemerkten die Schüler auch die Abhängigkeit der Strategie von der gewählten Definition der Potenz. Nachdem ich die Strategien hatte beschreiben lassen, bemühte ich mich um eine Formalisierung. Für die zweite Strategie ergab sich:

O	P
	$a^n b^n = (ab)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
? m	$a^1 b^1 = ab = (ab)^1$
	$a^2 b^2 = (a^1 a)\,(b^1 b) = (a^1 b^1)\,(ab) = (ab)^1 (ab) = (ab)^2$
	.
	.
	.
	$a^k b^k = \ldots = (ab)^k$
	$a^{k+1} b^{k+1} = (a^k a)\,(b^k b) = (a^k b^k)\,(ab) = (ab)^k\,(ab) = (ab)^{k+1}$
	.
	.
	.
	$a^m b^m = \ldots = (ab)^m$

Das ist natürlich die Methode der vollständigen Induktion, die sich hier auf ganz natürliche Weise ergab. Ich habe sie an dieser Stelle allerdings noch nicht als allgemein tragfähige Methode abgehoben, was mir aber als möglich erscheint. In einer dritten Phase habe ich die Gewinnstrategie ohne Tableau hinschreiben lassen, es ergab sich der Beweis in der klassischen Form.

Das Beispiel zeigt uns die heuristische Leistungsfähigkeit der Dialoge. Natürlich gibt es auch bei dieser Methode Beweise, die die Schüler als Proponenten nicht finden können, da die Idee eben eine gewisse Originalität erfordert. Hier kann der Lehrer als Proponent operieren und nach und nach die Schüler seine Strategie durchschauen lassen. Ein gut geeignetes Beispiel ist dafür der Beweis für die Nichtabzählbarkeit der reellen Zahlen.

Die Dialoge setzen natürlich auch gewisse logische Techniken voraus. Ich habe aber eine Reihe von Beispielen gesammelt, wie durch Dialoge schon Kinder im frühen Alter logisch richtig argumentieren lernen. Dafür zwei Beispiele:

Kind (6 Jahre):	„Ich möchte bitte ein Eis."
Mutter:	„Wenn du Eis ißt, bekommst du Bauchschmerzen."

Das Kind versucht es beim Vater, der von der Antwort der Mutter nichts weiß, und hat Erfolg. Es bekommt sein Eis und erzählt der Mutter:

Kind:	„Ich habe Eis gegessen und keine Bauchschmerzen bekommen."

Das Kind hat also logisch richtig eine Aussage der Form $a \Rightarrow b$ negiert mit $a \wedge \neg b$.

Folgendes Beispiel spielt sich am Mittagstisch ab:

Mutter:	„Du ißt wie ein Baby."
Kind (7 Jahre):	„Du warst auch mal ein Baby."

Die Mutter will antiautoritär reagieren.

Mutter:	„Jeder war ein Baby."
Kind:	„Nicht jeder war ein Baby."
Mutter:	„Wer denn nicht?"
Kind:	„Adam und Eva."

Hier negiert das Kind richtig eine Aussage der Form $\bigwedge_x A(x)$ mit $\bigvee_x \neg A(x)$ und erbringt dafür durch Angabe eines solchen x (hier durch Angabe sogar zweier solcher Elemente) den Nachweis. Man sollte einmal durch Beobachtung solchen Argumentierens die Entwicklung der logischen Fähigkeiten systematisch untersuchen.

Zusammenfassend können wir feststellen, daß es mit Hilfe von Dialogen möglich ist, einigen altbekannten Schwierigkeiten beim Lehren des Beweisens zu begegnen.

Die Variationsmöglichkeit gestattet eine gute Anpassung an die psychologischen Fähigkeiten, ohne daß es nötig wäre, mathematisch inkorrekt vorzugehen. Auch die Anforderungen an Strenge, die heute von einem Puristen für einen Beweis gefordert werden, werden mit ziemlicher Sicherheit in fünfzig Jahren überholt sein. Gerade diese Einsicht legitimiert unser Vorgehen.

Wenn man eine Aussage als bewiesen ansieht, sobald der Opponent keine Gewinnstrategie besitzt, so erhält man sogar die klassische Logik und ist damit nicht an die intuitionistischen Einschränkungen von LORENZEN gebunden, wie LORENZ gezeigt hat.

Eine weitere Rechtfertigung mag man daran sehen, daß einige grundlegende Definitionen der klassischen Mathematik regelrecht auf Dialoge zugeschnitten erscheinen. Es sei nur an die „Epsilontik“ erinnert.

Vor einem möglichen Mißverständnis sei aber ausdrücklich gewarnt. Es ist nicht meine Absicht, eine Form des Beweisens für die Schu1e einzuführen. Die Dialoge sollen in enger Verbindung zur Heuristik zu den mathematischen Beweisen in klassischer Form hinführen. Das schließt nicht aus, daß man sich in bestimmten Altersstufen mit der Dialogebene beschränken kann.

Damit scheint mir eine ausreichend tragfähige und genügend legitimierte Konzeption für das Lehren des Beweisens gegeben zu sein. Wir wollen sie abschließend skizzieren:

1. Das Lehren des Beweisens spielt sich in folgenden Stufen ab:

1. Stufe:	Logisch richtiges Argumentieren.
2. Stufe:	Produktiv konkretes Operieren im Dialog.
3. Stufe.	Verbales Formulieren der Gewinnstrategie im Dialog.
4. Stufe:	Formales Operieren im Dialog.
5. Stufe:	Dialogfreies formales Operieren ohne Formalisierung der Sprache.
6.Stufe:	Formale Logik.
7. Stufe:	Formalisiertes Beweisen.

2. Es gibt eine den psychologischen Gegebenheiten angemessene Höchststufe, die erreicht werden kann und angestrebt werden sollte.

3. Bei Schwierigkeiten in der angestrebten Stufe sollte der Lehrer bei einer niedrigeren beginnen und dann schrittweise erhöhen.

4. Der Lehrer sollte es stets anstreben, die Schüler von früheren Stufen zu lösen, wenn eine höhere erreicht ist.

Anmerkung

COURANT und ROBBINS haben bereits darauf hingewiesen, daß man sich den Kovergenznachweis vor dem Hintergrund eines Wettstreits veranschaulichen kann.

Literatur

Lorenzen, P., Metamathematik, Mannheim 1962.