3. Der Beweis als Gewinnstrategie im Unterrichtsdialog

Praxis der Mathematik 11 (1967), 297-300

1. Einleitung

Eine wesentliche Aufgabe des Mathematikunterrichts ist es, die Schüler das Beweisen zu lehren. Dazu müssen sie zunächst die Beweisbedürftigkeit mathematischer Sätze erkennen. Dann sind Beweise zu finden. Natürlich kann der Lehrer auch Beweise vortragen, aber in diesem Verfahren liegen sicher die Wurzeln für manches Vorurteil gegenüber der Mathematik. Freilich gibt es auch so geniale Beweise, daß der Schüler sie selbst nicht finden kann. Hier ist es Aufgabe des Lehrers, den Weg zu ebnen und die Schüler zu führen. Solche Beweise haben als mathematische Inhalte einen Bildungswert.

Erfahrungsgemäß ist es in der Geometrie einfacher als in der Arithmetik, das Beweisen in Gang zu bringen. Deshalb stand der Algebraunterricht schon immer in der Gefahr, in trockenen Formalismus und Aufgabendrill auszuarten.

Hier soll ein Vorschlag gemacht werden, wie man Beweise für arithmetische Sachverhalte im Unterricht entwickeln kann, ohne den Schülern abstrakte Schlüsse aufzwingen zu müssen. Vorausgesetzt wird dabei, daß der Schüler die Beweisbedürftigkeit mathematischer Sätze erkannt hat. Als Methode werden *Dialoge* verwendet, die z.B. P. LORENZEN (1962) bei der Formalisierung der Logik in seiner Metamathematik benutzt. Wir wollen das Verfahren an einigen typischen Beispielen zeigen.

2. Dialog zu einem Kommutativgesetz

Hat man die Rechenregeln für ganze Zahlen im Unterricht erarbeitet, so wird man entsprechende Regeln auch für rationale Zahlen vermuten, etwa

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} \qquad (b, d \neq 0), \qquad \text{Kommutativgesetz.}$$

Wir können uns vorstellen, daß dies Gesetz in einem Dialog zwischen einem *Proponenten* (P) und einem *Opponenten* (0) zu verteidigen ist. Zunächst kann etwa der Lehrer als Opponent auf einen Beweis verzichten, er sagt:

„Non dubito“ (symbolisch: !).

Er kann aber auch bezweifeln, er sagt dann:

„Dubito“ (symbolisch: ?).

Der Proponent erwartet nun die Vorgabe eines Zahlenbeispiels.

Der Opponent bezweifelt etwa die Richtigkeit für $\frac{2}{3}, \frac{5}{7}$ (symbolisch: $?\frac{2}{3}, \frac{5}{7}$).

Der Proponent zeigt wahrscheinlich durch Ausrechnen der Produkte die Richtigkeit:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21}, \quad \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{21} \quad \text{also} \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3}.$$

Der Proponent hat die Forderung erfüllt, der Opponent muß sagen:

„Non dubito“.

Die eigentliche Aufgabe des Proponenten besteht aber darin, für **jedes** geforderte

Beispiel die Behauptung nachzuweisen. Das ist nur möglich, wenn sie richtig ist. Diese Gewißheit hat der Proponent aber erst dann, wenn er eine *Gewinnstrategie* für den Dialog besitzt. Der obige Nachweis läßt nicht die Möglichkeit einer solchen Strategie erkennen.

Die Aufgabe besteht also für den Lehrer darin, die Schüler als Proponenten so operieren zu lassen, daß sie zu einer Strategie kommen können.

Aus folgendem Nachweis kann man eine Strategie entwickeln:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{5 \cdot 2}{7 \cdot 3} = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3}.$$

Die Schüler können natürlich zu einer solchen Darstellung nur kommen, wenn sie nach einer Gewinnstrategie suchen.

Sie ist gefunden, wenn die Schüler als Proponenten wissen, daß sie für $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{c \cdot a}{d \cdot b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$$

zeigen können. Man legt dabei die Rechenregeln für ganze Zahlen und die Multiplikationsdefinition für rationale Zahlen zugrunde.

Schematisch (an der Tafel) wickelt sich das in folgender *Tafel* ab:

	O	P
		$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$
!	? $\frac{2}{3}, \frac{5}{7}$	$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7} = \frac{10}{21} = \frac{5}{7}\cdot\frac{2}{3}$
		$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7} = \frac{2\cdot 5}{3\cdot 7} = \frac{5\cdot 2}{7\cdot 3} = \frac{5}{7}\cdot\frac{2}{3}$
	! ? $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d} = \frac{c\cdot a}{d\cdot b} = \frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$

Mit diesen Dialogen kann der Lehrer den Abstraktionsgrad weitgehend dadurch bestimmen, wann er als Opponent „non dubito“ sagt. Er wird das vom Entwicklungsstand der Klasse abhängig machen.

Man sieht hier, daß man natürlich mit diesen Dialogen auch das Beweisen in Gang bringen kann. Der Beweis eines Satzes ergibt sich damit als Gewinnstrategie für einen Dialog.

3. Vollständige Induktion

Es soll für die Aussage

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1} \qquad \text{für alle natürlichen Zahlen } n.$$

ein Dialog geführt werden.

Auch hier hat der Proponent für jede natürliche Zahl, für die der Opponent den Nachweis verlangt, die Richtigkeit zu zeigen. Der Lehrer als Opponent wird zunächst einige Zahlenbeispiele vorgeben.

Wie kommt der Proponent zu einer Gewinnstrategie? Die entscheidende Erkenntnis ist:

Verlangt der Opponent den Nachweis für n, dann kann der Proponent den Dialog gewinnen, falls er nach und nach für alle Zahlen 1, 2,..., n den Nachweis erbringen kann. Das ist aber sichergestellt, wenn er ihn für 1 erbracht hat und unter der Voraussetzung, daß er ihn für eine Zahl bereits erbracht hat, er ihn auch für die folgende bringen kann. Denn dann kann er ihn mit 1 auch für 2, mit 2 auch für 3 usw. mit n-1 auch für n erbringen.

Man erhält die nachfolgende Tafel:

O		P
!	? n	Für alle n gilt
		$\frac{1}{1\cdot 2} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$
		$\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$
		.
		.
		.
		$\frac{1}{1\cdot 2} + \dots + \frac{1}{m(m+1)} = \frac{m}{m+1}$
		$\frac{1}{1\cdot 2} + \dots + \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)}$
		$\frac{\;}{1} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} = \frac{m^2+2m+1}{(m+1)(m+2)} =$
		$\frac{1}{1\cdot 2} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

Wir weisen darauf hin, daß hiermit die Methode der vollständigen Induktion als Gewinnstrategie für eine besondere Art von Sätzen entwickelt wird (LORENZEN

1962, S. 58-59).

4. Weiteres Beispiel

Wir wollen nun eine Gewinnstrategie für einen Satz geben, dessen Beweis den Schülern erfahrungsgemäß ziemliche Schwierigkeiten bereitet. Bessere Ergebnisse ließen sich mit Hilfe von Dialogen erzielen.

Es gibt keine eineindeutige Zuordnung zwischen der Menge der natürlichen Zahlen N und der Menge der reellen Zahlen im Intervall]0;1[.

Im Unterricht kann man zu diesem Satz kommen, nachdem man gefunden hat, daß die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist.

Spricht der Lehrer als Proponent die Behauptung aus, daß die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 nicht abzählbar ist, so opponieren die Schüler. Der Proponent kann nun eine Zuordnung verlangen. Die Schüler werden als Opponent ein Beispiel zu konstruieren versuchen. Der Lehrer gibt darauf eine Zahl an, die nicht erfaßt worden ist. Er wird natürlich so verfahren, daß die Schüler schließlich seine Gewinnstrategie durchschauen. Sie besteht darin, daß für die Zuordnungsvorschrift

$$n \leftrightarrow 0,\, a_{n1}a_{n2}...$$

des Opponenten der Proponent nur eine Zahl $0,\, a_1a_2 ...$ mit der Eigenschaft $0 \neq a_n \neq a_{nn}$ für alle *n* zu wählen braucht, was ja immer möglich ist. Das ist eine Zahl, die durch die Vorschrift nicht erfaßt wird.

Eine mögliche Tafel mit der Gewinnstrategie lautet:

O		P	
		Es gibt keine eineindeutige Zuordnung zwischen N und]0;1]	
!	Es gibt eine eineindeutige Zuordnung.		
		!	?
	$n \leftrightarrow 0, a_{n1}a_{n2}\ldots$		Welches n gehört zu $0, a_1a_2\ldots$ mit $0 \neq a_n \neq a_{nn}$?

Ähnlich genial verläuft der Beweis für den Satz vom Nichtabbrechen der Primzahlfolge. Auch hier liefert der euklidische Beweis eine Gewinnstrategie, indem der Proponent für jede endliche Primzahlmenge, die vom Opponenten vorgelegt wird, eine Primzahl konstruieren kann, die darin nicht vorkommt.

Häufig werden diese Beweise indirekt geführt. Bezeichnenderweise umgeht aber EUKLID diese Form, was schon in der Formulierung zum Ausdruck kommt:

> *„Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.“*

Hier wird deutlich, daß der Satz in einem Dialog konstruktiv verteidigt werden kann und wohl auch werden sollte.

Das ist bei den eigentlichen berühmten indirekten Beweisen, etwa für die Irrationalität von $\sqrt{2}$, nicht möglich. Auch sie stellen sich aber als Gewinnstrategien in einem Dialog dar, bei dem man lediglich nicht konstruktiv arbeiten kann. Wir geben die Tafel für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ an:

O		P	
		Es gibt keine teilerfremden ganzen Zahlen, deren Quotient $\sqrt{2}$ ist.	
!	Es gibt doch solche Zahlen p,q.		
		!	?
			$\sqrt{2} = p/q$
			$\Rightarrow p^2 = 2q^2$
			$\Rightarrow p = 2p'$
			$\Rightarrow (2p')^2 = 2q^2$
			$\Rightarrow 2p'^2 = q^2$
			$\Rightarrow q = 2q'$
			p und q sind nicht teilerfremd.

5.Schlußbemerkungen

Natürlich braucht man auf die Dauer nicht mit den Tafelübersichten zu arbeiten, aber es ist doch zweckmäßig, bei neuartigen Beweisaufgaben immer wieder darauf zurückzugreifen. Man sollte auch die Dialoge, die im Unterricht geführt und an der Schultafel notiert werden, vom fiktiven Dialog abheben, der die Gewinnstrategie darstellt. Besonders brauchbar sind die Dialoge bei den Konvergenzbeweisen der Analysis. Für die Oberstufe ergibt sich schließlich eine reizvolle Möglichkeit zur Einführung in die Logik, indem man grundlegende Gewinnstrategien sucht. Man kann sich hier an den Untersuchungen von LORENZEN (1962, S. 26-30) orientieren. Grundlagenfragen lassen sich auf diese Weise leicht motivieren.

Die Dialoge bieten nach meiner Erfahrung folgende Vorteile gegenüber den üblichen Beweisverfahren:

a) Der Lehrer kann als Opponent die Nachweisebene bestimmen, wie am ersten Beispiel veranschaulicht wurde.

b) Der Beweis vollzieht sich im Dialog zwischen Lehrer und Schüler und nicht im Monolog des Lehrers (wie leider noch häufig üblich).

c) Die Schüler lernen die Spielregeln für Argumentationen in nicht notwendig mathematischen Dialogen.

d) Das Suchen nach Beweisen wird als Suche nach einer Gewinnstrategie wesentlich spannender.

e) Beweise werden als Gewinnstrategie richtig gewürdigt (nicht nur dem Lehrer zuliebe hingenommen).

Literatur

Euklid, Die Elemente, Ostwalds Klassiker Nr. 240, II. Teil, Buch IX, § 20

Lorenzen, P., Metamathematik, Mannheim (BI) 1962