BLK

Hans-Joachim Vollrath

Würzburg

Themenstränge, Themenkreise und Themenkomplexe im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I

Beitrag zu Modul 5

Inhalt

1. Zur Kontextabhängigkeit von Aufgaben

1. 1 Aufgaben mit eindeutigem Kontext

Aufgaben, die Schülerinnen und Schülern im Mathematikunterricht gestellt werden, sind in der Regel in Kontexte eingebettet. Die in der Unterrichtsstunde behandelten Aufgaben beziehen sich unmittelbar auf die Inhalte, die gerade durchgenommen werden. Das gilt auch für die Hausaufgaben. Die Aufgaben einer Klassenarbeit variieren zwar stärker, aber auch sie sind klar umrissen, denn sie beschränken sich auf die Typen, die im vorangegangenen Zeitabschnitt behandelt worden sind. Abschlußarbeiten (z.B. Hauptschulabschluß, Realschulabschluß, Abitur) könnten zwar theoretisch alle bis dahin behandelten Aufgabentypen enthalten, doch beziehen auch sie sich in der Regel auf einen begrenzten Vorrat komplexerer Aufgabentypen, auf die sich die Schülerinnen und Schüler in der Vorbereitungszeit einstellen können.

Ganz anders ist dagegen die Situation beim Lösen der Aufgaben in der TIMSS gewesen. Hier wurden den Schülerinnen und Schülern Aufgaben aus ganz unterschiedlichen Kontexten gestellt. Sie waren deshalb gefordert, zunächst die Aufgabentypen zu identifizieren, also in Gedanken selbst geeignete Kontexte herzustellen.

Bei vielen Aufgaben bereitete das den Schülerinnen und Schülern sicher keine besonderen Schwierigkeiten. Betrachten wir einige Beispiele (TIMSS):

(1)

$$\begin{array}{r} 1054 \\ \underline{-865} \\ ?? \end{array}$$

A 189
B 199
C 211
D 289
E 299

(2) Das Ergebnis von $\frac{3}{5}+\frac{2}{7}$ lautet ...

A $\frac{21}{10}$

B $\frac{5}{12}$

C $\frac{10}{21}$

D $\frac{6}{35}$

E $\frac{31}{35}$

(3) Wenn Dir jemand von 100 DM 5% schenken will, so erhältst Du ...

A 500 DM
B 50 DM
C 5 DM
D 0,50 DM
E 0,05 DM

(4) Wenn $\frac{x}{2} < 7$, dann ist ...

A $x < \frac{7}{2}$
B $x < 5$
C $x < 14$
D $x > 5$
E $x > 14$

Man erkennt unmittelbar, daß Aufgabe (1) zum *Rechnen mit natürlichen Zahlen* gehört, Aufgabe (2) in die *Bruchrechnung*, Aufgabe (3) in die *Zinsrechnung* und Aufgabe (4) zum Thema *Ungleichungen*.

Bei den Aufgaben handelt es sich um *Grundaufgaben* der jeweiligen Themenbereiche, zu denen im zugehörigen Unterrichtsabschnitt die entsprechenden Lösungverfahren gelehrt werden.

1.2 Aufgaben mit mehreren möglichen Kontexten

Etwas anders ist die Situation bei der folgenden Aufgabe (TIMSS):

Die Anzahl der 750 ml-Flaschen, die von 600 l Wasser gefüllt werden können, beträgt ...

A 8
B 80
C 800
D 8000

Überlegen wir uns, in welchen unterrichtlichen Kontext diese Aufgabe paßt.

(1) Offensichtlich handelt es sich um eine Aufgabe zu Rauminhalten. Sie paßt also in das Thema *Rechnen mit Größen*. Dabei geht es darum, zwei gleichartige Größen durcheinander zu dividieren. Dazu müssen sie allerdings zunächst in die gleiche Maßeinheit umgewandelt werden. Man kann diese Aufgabe sowohl im Kontext der *natürlichen Zahlen* als auch der *Bruchzahlen* stellen. Im 1. Fall sind die 600 l in ml umzuwandeln, im 2. Fall ist es auch möglich, die 750 ml in l zu verwandeln und dann durch den Dezimalbruch 0,750 zu dividieren.

(2) Aufgaben dieser Art werden im Unterricht jedoch häufig auch als *Anwendungsaufgaben zum Rechnen*, hier zum Dividieren, gestellt. Dies kann bei natürlichen Zahlen und bei den Dezimalbrüchen geschehen.

(3) Formuliert man die Aufgabe etwas um, dann wird deutlich, daß man sie auch in einem anderen Kontext sehen kann:

1 Flasche faßt 750 ml. Wie viele dieser Flaschen kann man mit 600 l Wasser füllen?

Dieser Aufgabe liegt eine proportionale Funktion zugrunde, nämlich die Zuordnung

Rauminhalt → *Anzahl der Flaschen*.

Man kann sie also im Kontext *proportionaler Funktionen* behandeln. Etwa so:

	Rauminhalt	Anzahl Flaschen	
:750	750 ml	1	:750
	1 ml	$\frac{1}{750}$	
· 600 000	600 000 ml	$\frac{600\,000}{750}$	· 600 000

4) Viele Lehrer behandeln diesen Aufgabentyp auch immer noch als *Dreisatzaufgabe* oder Aufgabe der *Schlußrechnung*:

750 ml Wasser passen in 1 Flasche.
1 ml Wasser paßt in $\frac{1}{750}$ Flasche.
600 000 ml Wasser passen in $\frac{600000}{750} = 800$ Flaschen.

(5) Am Gymnasium in Bayern kann man diese Aufgabe im Rahmen der *Verhältnisrechnung* stellen und wie folgt ansetzen:

1 Flasche : x Flaschen = 750 ml : 600 000 ml.

(6) Im Zusammenhang mit *linearen Funktionen* überlegt man sich:

1 Flasche faßt 750 ml. x Flaschen fassen dann 750x ml Wasser.
In x Flaschen passen y ml Wasser. Es gilt also y = 750x.
Es ist nun die Anzahl der Flaschen gesucht, in die 600 000 ml Wasser passen.
Also ist die *lineare Gleichung* zu lösen:

$$750x = 600\,000.$$

(7) Man sollte bei diesen Überlegungen nicht übersehen, daß man die Aufgabe am einfachsten wohl durch eine *Überschlagsrechnung* löst:

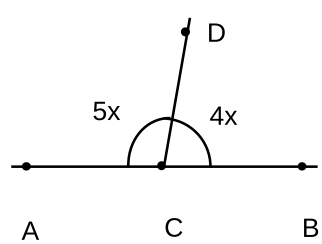
> In 1 Flasche gehen etwa 1 l. Mit den 600 l kann man also etwa 600 Flaschen füllen. Dem kommen die 800 von Möglichkeit C am nächsten.

Man sieht also, daß man diese Aufgabe in verschiedenen mathematischen Kontexten in unterschiedlicher Weise bearbeiten kann.

Mit fortschreitendem Alter werden die den Schülerinnen und Schülern zur Verfügung stehenden Methoden immer leistungsfähiger. Mit zunehmendem Alter dürfte dieser Aufgabentyp ihnen deshalb immer weniger Schwierigkeiten bereiten.

1.3 Aufgaben mit mehrdeutigen Kontexten

Der Mathematikunterricht der Sekundarstufe I wird im wesentlichen bestimmt durch die beiden Themenblöcke *Algebra* und *Geometrie*. In der Praxis hat dabei das Thema Algebra ein deutlich höheres Gewicht. Obwohl es zwischen den beiden Themen zahlreiche Verbindungen gibt, man denke etwa an Flächeninhalte, Rauminhalte sowie Graphen von Funktionen, werden diese Gebiete von den Schülerinnen und Schülern doch eher getrennt gesehen. Werden Geometrie und Algebra in bestimmten Aufgabenstellungen in für die Schülerinnen und Schüler neuartiger Weise gemischt, so können Schwierigkeiten auftreten. Betrachten wir z.B. die Aufgabe (TIMSS):



Wie groß ist der Winkel BCD in obenstehender Figur, wenn AB eine Gerade ist?

A 20°
B 40°
C 50°
D 80°
E 100°

Aus der Sicht der Geometrie ist es ungewöhnlich, Winkel nicht mit griechischen Buchstaben zu bezeichnen.

Aus der Sicht der Algebra ist andererseits irritierend, daß die „Unbekannte“ hier nicht mit x sondern mit 4x bezeichnet wird.

Um die Gleichung aufstellen zu können, wird der geometrische Sachverhalt benötigt, daß sich die beiden Winkel zu 180° ergänzen. Das führt zur Gleichung

$$5x + 4x = 180°.$$

Die Algebra liefert das Lösungsverfahren, indem man mit Hilfe von Äquivalenzumformungen nach x auflöst. Man erhält

$$x = 20°.$$

Der geometrische Sachverhalt zwingt einen, nun noch mit 4 zu multiplizieren, so daß man für den gesuchten Winkel 80° erhält.

Das Beispiel macht deutlich, daß es in Aufgabenstellungen, in denen sich unterschiedliche Kontexte mischen, zu ungewöhnlichen Situationen und damit zu Schwierigkeiten für die Schülerinnen und Schüler kommen kann.

1.4 Aufgaben als Kombinationen von Teilaufgaben aus unterschiedlichen Kontexten

Aufgaben, die sich auf *Umweltsituationen* beziehen, setzen sich häufig aus Teilaufgaben zusammen, die zu unterschiedlichen Kontexten gehören.

Wird z.B. das Streichen eines Treppenhauses geplant, so ist es zweckmäßig, zunächst eine Abwicklung für die zu streichenden Flächen zu zeichnen (*Raumgeometrie*). Dann ist die Größe der zu streichenden Flächen zu berechnen (*Flächeninhaltsberechnung*). Daraus wird das Volumen der benötigten Farbe bestimmt (*proportionale Funktion* zwischen dem Flächeninhalt der zu streichenden Flächen und dem Volumen der Farbe). Schließlich wird ihr Preis ermittelt (*proportionale Ware-Preis-Funktion*). Praktisch werden dabei Überschlagsrechnungen durchgeführt (*Approximation*).

Zur Lösung dieser Aufgaben müssen die Schülerinnen und Schüler *Verbindungen* zwischen unterschiedlichen mathematischen Themen erkennen können und in der Lage sein, innerhalb des Aufgabenkomplexes zwischen unterschiedlichen Kontexten umzuschalten.

1.5 Komplexe Aufgaben mit Unteraufgaben aus unterschiedlichen Kontexten

Bei den in der TIMSS gestellten Aufgaben handelt es sich zum überwiegenden Teil um *Grundaufgaben*. Das mäßige Abschneiden vieler Schülerinnen und Schüler ist deshalb so alarmierend, weil sie wegen der unzureichenden Beherrschung der Grundaufgaben nur schlechte Chancen haben, *komplexere Aufgaben* zu lösen.

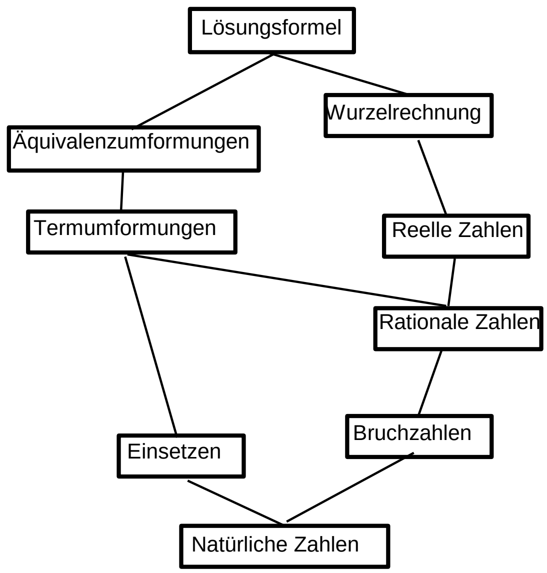
Im Verlaufe ihrer Schulzeit scheitern Schülerinnen und Schüler immer wieder, wenn sie früher behandelte Aufgaben nicht lösen können. Nachhilfelehrer sind deshalb bemüht, zunächst die Grundlagen zu sichern und dann auf ihnen aufzubauen. HEINRICH BÖLL schildert das sehr plastisch in seinen Lebenserinnerungen:

> „Wir hockten zu Schularbeiten zusammen, und ich versuchte, an einigen das merkwürdige deutsche Mathematiktrauma zu heilen, mit Konvertiteneifer, erst kurz vorher hatte mein Bruder Alfred dieses Trauma an mir geheilt, indem er systematisch und geduldig auf die Grundkenntnisse ‚zurückbohrte', Lücken entdeckte, diese schloß, meine Basis stabilisierte. Das hatte zu einer solchen Mathematikbegeisterung geführt, daß wir wochenlang die Dreiteilung des Winkels zu entdecken versuchten, und manch-mal glaubten wir der Lösung so nahe zu sein, daß wir nur noch flüsterten. Der im Nebenzimmer hausende ‚möblierte Herr' war Dipl. Ing. und als solcher befähigt, unsere Entdeckung zu übernehmen."
> (H. BÖLL, *Was soll aus dem Jungen bloß werden? Oder: Irgendwas mit Büchern*, München (DTV) 1990[5], S. 32-33)

Betrachten wir ein Beispiel. Das Lösen einer quadratischen Gleichung wie

$$\frac{1}{4}(x-\frac{2}{3})^2+\frac{1}{18}=-\frac{7}{12}x+\frac{2}{3}$$

erfordert Fähigkeiten aus unterschiedlichen Bereichen. Einen Überblick gibt das folgende Diagramm.



Wie man sieht, hängen die erforderlichen Fähigkeiten voneinander ab. Komplexere Aufgaben erfordern *Hierarchien von Fähigkeiten*. Diese Fähigkeiten sollen in den einzelnen Themenbereichen beim Lösen der jeweiligen Grundaufgaben vermittelt werden.

Komplexere Aufgaben *erfordern* also unterschiedliche Fähigkeiten; andererseits werden solche Aufgaben im Unterricht benutzt, um diese Fähigkeiten zu *üben*. Man sollte allerdings darauf achten, daß die Aufgaben nicht künstlich oder gar schikanös auf die Schülerinnen und Schüler wirken. Die quadratische Gleichung unseres Beispiels kann man z.B. damit rechtfertigen, daß Aufgaben dieser Art beim Schnitt einer Parabel mit einer Geraden auftreten können.

Zum Lösen komplexerer Aufgaben wird allerdings auch die Fähigkeit benötigt, überhaupt zu erkennen, welcher Kontext in den einzelnen Lösungsschritten jeweils herzustellen ist.

1.6 Ziele

Fassen wir die genannten Anforderungen der unterschiedlichen Aufgabentypen zusammen, so sind folgende Ziele anzustreben:

- Die Schülerinnen und Schüler sollen lernen, Aufgaben selbständig geeigneten Kontexten zuzuordnen, um diese mit den entsprechenden Verfahren lösen zu können.

- Sie sollen lernen, Verbindungen zwischen verschiedenen Kontexten herzustellen, um Aufgaben lösen zu können, in denen unterschiedliche mathematische Bereiche miteinander verbunden sind.

- Sie sollen in komplexeren Situationen für unterschiedliche Teilaufgaben angemessene Kontexte herstellen und zwischen diesen Kontexten wechseln können.

- Bei den Schülerinnen und Schülern soll eine Hierarchie von Fähigkeiten ausgebildet werden, so daß sie in der Lage sind, komplexere Aufgaben, die mehrere unterschiedliche Lösungsschritte erfordern, selbständig zu lösen.

Zur Erreichung dieser Ziele werden traditionell im Mathematikunterricht bestimmte *Aufgabenbereiche* hervorgehoben. Typische Beispiele sind: Bruchrechnung, Prozentrechnung, Zinsrechnung, Schlußrechnung, Potenzrechnung, Wurzelrechnung, bei denen die Nachsilbe „rechnung“ auftritt. Diese Typisierung ist jedoch unzureichend, weil sie lediglich eine Sicht der Mathematik nach Art eines „Puzzle“ vermittelt. Die angestrebten Ziele erfordern jedoch eine deutliche Strukturierung der Mathematik, bei der Zusammenhänge über die einzelnen Jahrgangsstufen hinweg und Beziehungen zwischen den unterschiedlichen Bereichen, die in einer Jahrgangsstufe behandelt werden, erkennbar sind.

2. Über das Gerüst eines Mathematik-Lehrgangs in der Sekundarstufe I

2.1 Zusammenhänge

Lehrpläne und Lehrbücher *gliedern* die in den einzelnen Jahrgangsstufen zu behandelnden Inhalte in einzelne Abschnitte. Diese Abschnitte werden sicher den Schülerinnen und Schülern bewußt. Der Wechsel der Themen wird von ihnen im allgemeinen auch begrüßt, weil sie dann bis zu einem gewissen Grad immer wieder die Chance eines Neubeginns haben.

Über die einzelnen Jahrgangsstufen hinweg lassen Lehrpläne und Lehrbücher gewisse *thematische Linien* erkennen, zu denen in den einzelnen Jahrgangsstufen Beiträge geleistet werden, die insgesamt zu einer fortschreitenden Entwicklung der Themen führen. Wir hatten oben schon auf die Themen *Zahlen, Größen, Funktionen, Gleichungen* und *Approximationen* verwiesen. Sie bieten die Chance, daß die Schülerinnen und Schüler über den ganzen Mathematikunterricht hinweg einen „roten Faden“ erkennen. Das muß natürlich im Unterricht herausgearbeitet werden. Den Schülerinnen und Schülern sind dabei auch immer wieder Aufgaben zu stellen, in denen sie selbst den entsprechenden Kontext zu einem der zentralen Themen herstellen sollen.

Zwischen einigen dieser Themen bestehen Zusammenhänge. So ist z.B. in der 9. Jahrgangsstufe das Quadrieren ein *Bindeglied* zwischen den *reellen Zahlen*, den *quadratischen Gleichungen*, den *quadratischen Funktionen* und der *Satzgruppe des Pythagoras*. Diese Zusammenhänge werden jedoch von den Schülerinnen und Schülern in der Regel nicht ohne weiteres gesehen. Es bedarf vielmehr besonderer Bemühungen der Lehrkräfte, dies deutlich zu machen. Es erfordert entsprechende Erläuterungen und themenübergreifende Aufgabenstellungen.

Die Schülerinnen und Schüler lösen im Laufe ihrer Schulzeit Hunderte von Aufgaben unterschiedlichen Gewichts. Bei den einzelnen Themen sind die Aufgaben meist nach ihrer Komplexität gegliedert. Meist beginnen die Übungen mit einfachen, grundlegenden Aufgaben, bei denen im Grunde genommen angestrebt wird, daß sie *alle* von *allen* Schülerinnen und Schülern gelöst werden können. Durch Steigerung der Komplexität werden die Anforderungen gesteigert, bis schließlich ein Schwierigkeitsgrad erreicht wird, bei dem man in etwa eine Normalverteilung der Leistungen erreicht.

Wichtig ist, daß die Schülerinnen und Schüler erkennen, welche der Aufgaben grundlegende Anforderungen bei einem Thema darstellen, die kurz- und mittelfristig unbedingt erbracht werden müssen. Darüber hinaus sollten sie aber auch erfahren, welche dieser Anforderungen *langfristig wesentlich* sind. Das kann den Schülerinnen und Schülern zwar bis zu einem gewissen Grade in einem Ausblick deutlich gemacht werden. Insbesondere wird es aber darauf ankommen, bei neuen Themen jeweils Brücken zu früheren Themen herzustellen. Auf diese Weise sollten sie einen Eindruck von der erforderlichen *Hierarchie* der von ihnen erwarteten Fähigkeiten gewinnen.

Unsere Forderungen laufen darauf hinaus, den Schülerinnen und Schülern die *Unterrichtsstruktur erfahrbar zu machen*. Dabei geht es uns um die drei folgenden Strukturelemente:

Themenstränge - Themenkreise -Themenkomplexe.

2.2 Themenstränge als Leitlinien

Die zwei klassischen großen Themenbereiche des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe I sind *Algebra* und *Geometrie*. Neue Themenbereiche, die in Ansätzen schon in der Sekundarstufe I unterrichtet werden, sind *Wahrscheinlichkeit* und *Algorithmen*. Diese wollen wir in die folgenden Überlegungen mit einbeziehen, wenn sie sich bisher auch noch nicht überall durchgesetzt haben.

Noch in den sechziger Jahren war es am Gymnasium üblich, nach Themen getrennte Schulbücher anzubieten. So wurden z.B. von dem Lehrbuch von LAMBACHER-SCHWEIZER für die Mittelstufe 2 Bände Algebra und 2 Bände Geometrie angeboten. Die Schülerinnen und Schüler lernten mit Algebra und Geometrie zwei ganz unterschiedliche Gebiete der Mathematik kennen, die im Unterricht abschnittsweise im Wechsel behandelt wurden.

Inzwischen haben sich allgemein Jahrgangsbände durchgesetzt. Im Prinzip kann man die meisten Kapitel dieser Bücher den beiden großen Themen Algebra und Geometrie zuordnen. Doch ist das eine recht grobe Gliederung. Seit den siebziger Jahren kann man in den Lehrplänen und Schulbüchern der Bundesrepublik und der DDR *Themenstränge* erkennen, die sich über die einzelnen Jahrgänge hinziehen. Ihnen liegt eine alte didaktische Idee zugrunde, dem Mathematikunterricht *Leitlinien* zu geben. Leitlinien, die in den großen Unterrichtsreformen unseres Jahrhunderts eine wichtige Rolle spielten, waren der *Funktionsbegriff* zu Beginn unseres Jahrhunderts und die Begriffe *Menge*, *Abbildung* und *Struktur* in den sechziger Jahren.

Das Hervorheben bestimmter Themenstränge kann folgendes bewirken:

- Das Erkennen von Themensträngen hilft, das *Wesentliche* deutlicher zu erkennen.
- Diese Themen entfalten sich im Laufe der Schuljahre. Mathematik kann von den Schülerinnen und Schülern als etwas *Entwicklungsfähiges* erkannt werden.
- Bei den in den einzelnen Jahrgangsstufen behandelten Themen kann deutlich werden, welchen *Beitrag das Einzelne zum Ganzen* leistet.

Geeignete Themenstränge sind bestimmt durch:

- grundlegende mathematische Begriffe,
- zentrale mathematische Ideen,
- gewichtige mathematische Problemstellungen und
- tragfähige mathematische Methoden.

Lehrpläne und Lehrbücher zeigen Übereinstimmungen in der Wahl wichtiger Themenstränge; es finden sich aber auch Unterschiede. Als Themenstränge für die Sekundarstufe I erscheinen mir geeignet:

Zahlen und Größen, Funktionen, Terme und Gleichungen, Figuren und Körper, Abbildungen und Symmetrien, Flächen- und Rauminhalte, Wahrscheinlichkeit, Algorithmen, Approximation.

Bei den Themensträngen wird man vielleicht das eine oder andere wichtige Thema vermissen oder einige der genannten Themen für überflüssig halten. So habe ich darauf verzichtet, *Anwendungen* als Themenstrang auszuweisen, weil die Behandlung von Anwendungen nach meiner Auffassung ein durchgehendes Prinzip bei möglichst vielen Themen sein sollte.

Themenstränge betonen den „Turmcharakter" der Mathematik (WAGENSCHEIN), bei dem ein Sachverhalt auf dem anderen aufbaut.

2.3 Themenkreise als mathematische Verbindungen von Themensträngen

In den einzelnen Jahrgangsstufen bestehen Beziehungen zwischen den Themensträngen. So kann man die Themenstränge *Zahlen und Größen, Terme, Funktionen, Gleichungen und Ungleichungen* unter dem großen Thema *Algebra* und die Themenstränge *Figuren und Körper, Abbildungen und Symmetrien, Flächen- und Rauminhalte* unter dem Thema *Geometrie* zusammenfassen. Aber das sind nur sehr grobe Klammern. Tiefer gehend ist dagegen der Sachverhalt, daß Flächeninhalte eine Verbindung zwischen *Figuren* und *Gleichungen*, Rauminhalte eine Beziehung zwischen *Körpern* und *Gleichungen* herstellen. Betrachtet man außerdem z.B. beim Rechteck den Flächeninhalt in Abhängigkeit von der Länge bei konstanter Breite, so ist man beim Thema *Funktionen*.

Derartige Verbindungen werden in den Gliederungen der Lehrpläne und der Lehrbücher nicht unmittelbar sichtbar. Es ist jedoch wichtig, daß sie im Unterricht den Schülerinnen und Schülern deutlich werden. Wir wollen derartige Verbindungen von Themen als *Themenkreise* bezeichnen. Betonen *Themenstränge* die *vertikale* Struktur des Lehrgangs, so schaffen *Themenkreise* eine *horizontale* Struktur im Lehrgang.

Themenkreise weisen auf den „Gewebecharakter“ der Mathematik hin (WAGENSCHEIN), nach dem unterschiedliche Sachverhalte durch Probleme miteinander verbunden sind.

2.4 Themenkomplexe als situative Verbindungen von Themensträngen

Bei Themenkreisen wird die Querverbindung zwischen den Themen durch *mathematische* Ideen und Probleme hergestellt. Im täglichen Leben werden häufig durch die *Situation* Problemstellungen aus ganz unterschiedlichen mathematischen Bereichen miteinander verbunden. Das Thema „Weihnachtsplätzchen backen“ kann z.B. das Rechnen mit Gewichten, Flächeninhalten, Preisen und Anzahlen sowie das Formen von Figuren, das Bilden von Mustern und das Auslegen von Flächen miteinander verbinden. Wir wollen hier von *Themenkomplexen* sprechen. In ihnen werden unterschiedliche mathematische Sachverhalte und Problemstellungen situativ verbunden.

Themenkomplexe werden im Mathematikunterricht z.B. in *Lernzirkeln* oder in *Projekten* realisiert. Auch in Lehrbüchern finden sich gelegentlich Abschnitte, in denen zu einem bestimmten Thema Aufgaben aus unterschiedlichen mathematischen Gebieten gestellt werden.

Themenkomplexe weisen auf den *universellen Werkzeugcharakter* der Mathematik hin, der in so vielen Bereichen der Wissenschaft, der Technik, der Wirtschaft und des täglichen Lebens fruchtbar wird.

3. Themenstränge erfahrbar machen

3.1 Themenstränge herausarbeiten

So einleuchtend die Forderung ist, den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I nach Themensträngen zu gliedern, stellen sich dem doch einige praktische Probleme entgegen. Im folgenden sollen deshalb einige Anregungen gegeben werden, wie die Themenstränge im Unterricht deutlicher herausgearbeitet werden können.

(1) Jahrgangsstufe

Im Vordergrund des Unterrichts stehen für die meisten Schülerinnen und Schüler wohl die einzelnen *Unterrichtseinheiten*. Durch ihre zeitlich enge Aufeinanderfolge bestehen gute Chancen sie als Teil einer *Unterrichtssequenz* zu sehen. Schulbücher beschränken sich häufig darauf, den Inhalt in Sequenzen und diese in Einheiten zu gliedern.

Eine typische Gliederung eines Lehrbuchs für die 5. Jahrgangsstufe könnte wie folgt aussehen:

1. Darstellen von Zahlen und Größen
  1. Zahlen und Größen im Alltag
  2. Der Zahlenstrahl
  3. Das Zehnersystem
  4. Römische Zahlzeichen
  5. Runden
  6. Zeichnerische Darstellung
  7. Geschicktes Zählen

2. Punkte und Linien
  1. Gerade und krumme Linien
  2. Zueinander senkrechte Geraden
  3. Zueinander parallele Geraden
  4. Abstände

3. Addieren und Subtrahieren
  1. Addieren und Subtrahieren
  2. Schriftlich Addieren
  3. Schriftlich Subtrahieren
  4. Schätzen und Überschlagen

4. Multiplizieren und Dividieren
  1. Addieren und Multiplizieren
  2. Multiplizieren und Dividieren
  3. Schriftliches Multiplizieren
  4. Schriftliches Dividieren
  5. Schätzen und Überschlagen

5. Rechenregeln
  1. Vertauschbarkeit
  2. Zusammengesetzte Rechnungen
  3. Klammern
  4. Rechenvorteile
  5. Verknüpfungen

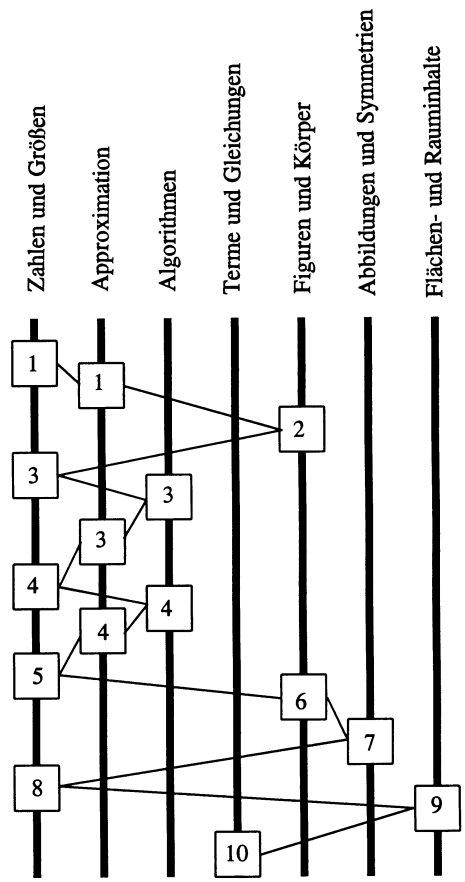
6. Geometrische Figuren
  1. Rechtecke und Quadrate
  2. Vierecke und Dreiecke
  3. Kreise
  4. Körper
  5. Abwicklungen

7. Symmetrische Figuren
  1. Achsensymmetrische Figuren
  2. Punktsymmetrische Figuren
  3. Drehsymmetrische Figuren
  4. Bandornamente

8. Größen
  1. Längen
  2. Geldwerte
  3. Gewichte
  4. Zeitspannen
  5. Größen Addieren und Subtrahieren
  6. Größen Multiplizieren und Dividieren
  7. Waren und Preise

9. Flächen- und Rauminhalte
  1. Messen von Flächeninhalten
  2. Berechnen von Flächeninhalten
  3. Messen von Rauminhalten
  4. Berechnen von Rauminhalten

10. Gleichungen
  1.Platzhalter
  2. Terme
  3. Gleichungen und Ungleichungen
  4. Lösen von Gleichungen und Ungleichungen



Das Buch ist also lediglich nach Sequenzen und diese sind nach Einheiten gegliedert. Die einzelnen Sequenzen bzw. Einheiten lassen sich folgenden Themensträngen zuordnen:

Das Diagramm zeigt den Wechsel zwischen den Themensträngen bei der vom Buch vorgeschlagenen Reihenfolge der Themen. Die in den Quadraten angegebenen Zahlen sind die Nummern der jeweiligen Kapitel. Die Übersicht läßt die meisten von uns geplanten Themenstränge - allerdings mit unterschiedlichem Gewicht - erkennen. Wenn die Themenstränge im Lehrbuch nicht ausgewiesen sind, ist es notwendig, bei der *Unterrichtsplanung* zunächst eine solche Zuordnung der einzelnen Abschnitte zu den Themensträngen vorzunehmen.

An der Übersicht erkennt man, weshalb das Lehrbuch in der Gliederung nicht die Themenstränge angibt: Die Reihenfolge der Sequenzen entspricht nicht den Themensträngen. Der Grund für die gewählte Reihenfolge liegt darin, daß das Buch der Lehrkraft einen Unterrichtsaufbau anbieten will, bei dem die Themen wechseln, so daß sich eine sinnvolle Aufteilung der Inhalte auf die beiden Halbjahre ergibt. Das Buch gibt also dem Unterrichtsverlauf eine höhere Priorität als der inhaltlichen Systematik. Im folgenden gehen wir davon aus, daß es didaktisch sinnvoll ist, Unterrichtssequenzen zu den verschiedenen Themensträngen innerhalb einer Jahrgangsstufe miteinander abzuwechseln. Unsere Übersicht zeigt jedoch, daß sich das Problem der „zerrissenen Themenstränge“ hier bei vier Themensträngen ergibt, nämlich bei *Zahlen und Größen, Approximation, Algorithmen,* sowie *Figuren und Körper*.

Die Zuordnung von Unterrichtssequenzen und Unterrichtseinheiten zu Themensträngen zeigt aber auch das *unterschiedliche Gewicht* der einzelnen Themenstränge. Notieren wir sie nach abnehmendem Gewicht, so erhält man etwa:

> *Zahlen und Größen - Figuren und Körper - Algorithmen- Abbildungen und Symmetrien - Terme und Gleichungen - Flächen- und Rauminhalte - Approximation*

Es wird keine Mühe bereiten, die gewichtigeren Themenkreise auch im Unterricht herauszuarbeiten; bei den weniger gewichtigen Themensträngen wird sich den Schülerinnen und Schülern die Bedeutung erst im Laufe der Schulzeit erschließen.

Vorschläge:

(1) In der Unterrichtsplanung ist zu entscheiden, welche Themenstränge im Lehrgang herausgearbeitet werden sollen. Beim eingeführten Lehrbuch sind die jeweils angegebenen Abschnitte den einzelnen Themensträngen zuzuordnen.

(2) Die Lehrkraft sollte bei der Behandlung des 1. Abschnitts eines Themenstrangs den Schülerinnen und Schülern den Themenstrang deutlich machen.

(3) Die Schülerinnen und Schüler sollten einen Plan erhalten, der ihnen eine Übersicht über die Themenstränge gibt.

(4) Es könnte eine Übersicht an die Wand gehängt werden, die es der Lehrkraft ermöglicht, den Schülerinnen und Schülern immer wieder zu zeigen, wo man sich gerade befindet.

(2) Lehrgang

Bei der Identifikation von Themensträngen im Lehrbuch der 5. Jahrgangsstufe haben wir die beiden Themenstränge *Funktionen* und *Wahrscheinlichkeit* noch nicht angegeben. Auch zu ihnen finden sich in dem vorgestellten Inhaltsverzeichnis bereits Inhalte, so etwa im Abschnitt „8.7 Waren und Preise“, den man zum Themenstrang *Funktionen* rechnen kann und im Abschnitt „1.7 Geschicktes Zählen“, der zum Themenstrang *Wahrscheinlichkeit* paßt. Sie haben aber nicht ausreichendes Gewicht, um bereits Themenstränge sichtbar werden zu lassen. Beide setzen erst später ein.

Auch andere Themenstränge beginnen nach bestimmten Lehrplänen erst in einer höheren Jahrgangsstufe. So verzichten einige Länder z.B. auf die Themen „Symmetrie von Figuren“ oder „Flächen- und Rauminhalte“ in der 5. Jahrgangsstufe. Für einen *späteren Einsatz eines Themenstrangs* kann es durchaus didaktisch plausible Gründe geben.

Problematischer erscheint das *Aussetzen von Themensträngen* in einzelnen Jahrgangsstufen. Dies zwingt bei der Behandlung des betreffenden Themenstrangs dazu, im Unterricht größere zeitliche Abstände zu überbrücken, so daß es den Schülerinnen und Schülern schwerfällt, noch den „roten Faden“ zu erkennen.

Vorschläge

(1) Themenstränge sollten im Unterricht hervorgehoben werden, wenn zu ihnen erstmals Beiträge von Gewicht im Unterricht behandelt werden.

(2) Alle angesprochenen Themenstränge sollten möglichst in *allen* folgenden Jahrgangsstufen auftreten.

3.2 Verbindungen innerhalb eines Themenstrangs knüpfen

1. Unterrichtssequenz

Folgen in einer Jahrgangsstufe innerhalb eines Themenstrangs Unterrichtssequenzen unmittelbar aufeinander, dann ist der Übergang unproblematisch.

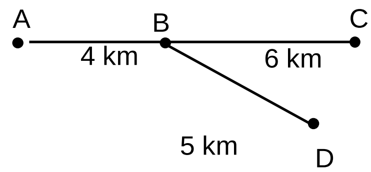
Liegen Unterrichtssequenzen zu anderen Themensträngen dazwischen, so ist es notwendig, eine Brücke zu schlagen. In unserem Beispiel liegt zwischen den Unterrichtssequenzen „1. Darstellen von Zahlen und Größen“ und „3. Addieren und Subtrahieren“ des Themenstrangs *Zahlen und Größen* die Sequenz „2. Punkte und Linien“ des Themenstrangs *Figuren und Körper*. Als Übergang bieten sich folgende Möglichkeiten an.

(1) *Anknüpfen an unmittelbar Vorangegangenes*

In dem vorgestellten Inhaltsverzeichnis geht dem Abschnitt „3. Addieren und Subtrahieren“ unmittelbar voraus das Thema „2.4 Abstände“. Zum neuen Thema könnte man überleiten durch eine Situation, in der Abstände zu addieren oder zu subtrahieren sind.

Beispiel:

Berechne die Weglängen:



a) von A nach C b) von A nach D c) von C nach A

In welchen Fällen stimmen die Weglängen mit den entsprechenden Abständen zwischen den genannten Punkten überein?

(2) *Anknüpfen an die vorige Sequenz des Themenstrangs*

In der 1. Sequenz stand das Zählen und das Darstellen der natürlichen Zahlen im Vordergrund. Man könnte z.B. die Frage stellen:

Wie kommt man zu neuen natürlichen Zahlen?

Die Antwort der 1. Unterrichtssequenz könnte z.B. sein: durch Weiterzählen. Zur neuen Unterrichtssequenz könnte die Antwort überleiten: durch Addieren oder durch Multiplizieren.

(3) *Rückgriff auf den Themenstrang*

Man könnte auch daran denken, daß man den Schülerinnen und Schülern zunächst den Themenstrang durch eine einprägsame Situation oder Problematik nahebringt. Das könnte z.B. sein: *Zahlen in der Umwelt*. Man läßt die Schülerinnen und Schüler zunächst unterschiedliche Situationen beschreiben.

Indem man das Augenmerk auf unterschiedliche Zahlangaben lenkt, kommt man zur Unterrichtssequenz „1. Darstellung von Zahlen". Zur neuen Unterrichtssequenz „3. Addie-ren und Subtrahieren" kann man hinführen, indem man auf das allgemeine Thema zurückgreift und nun z.B. eine Situation des Einkaufens wählt.

Zur Unterrichtssequenz „8. Größen" kann man gelangen, indem man wiederum auf *Zahlen und Umwelt* zurückgreift und z.B. fragt, was eigentlich die 5 in den Angaben 5 DM, 5 Pf, 5 kg, 5 g, 5 m, 5cm, 5 h, 5 min bedeutet.

2. Lehrgang

Zwischen den einzelnen Jahrgangsstufen bestehen zwischen den Abschnitten eines Themenstrangs in der Regel größere Unterschiede. Betrachten wir z.B. den Themenstrang *Zahlen und Größen*.

5. Jahrg.	6. Jahrg.	7. Jahrg.	8. Jahrg.	9. Jahrg.	10. Jahrg,
N Grundrechenarten, Größen mit Maßzahlen aus **N**	**B** Bruchrechnung, Dezimalbrüche, Größen mit Maßzahlen aus B	**B** Prozent- und Zinsrechnung, Q Grundrechenarten	**Q**	**R** Quadrieren und Wurzelziehen, unendliche Dezimalbrüche, Intervallschachtelungen	**R** Potenzrechnung

Die Übersicht macht unterschiedliche *thematische Einschnitte* deutlich. Die Zahlbereichserweiterungen von **N** nach **B** (von der 5. zur 6. Jahrgangsstufe) und von **Q** nach **R** (von der 8. zur 9. Jahrgangsstufe) finden jeweils in den Übergängen zwischen zwei Jahrgangsstufen statt, der Übergang von **B** nach **Q** innerhalb einer Jahrgangsstufe (7. Jahrgangsstufe). In jedem Fall sollte den Schülerinnen und Schülern bewußt gemacht werden, daß hier einschneidende Übergänge innerhalb eines Themenstrangs auftreten.

Dort wo eine thematische Fortsetzung zwischen zwei Jahrgangsstufen innerhalb eines Themenabschnitts stattfindet, wird man unmittelbar an die Problematik den vorangegangenen Abschnitt anknüpfen. In die Prozent- und Zinsrechnung kann man in der 7. Jahrgangsstufe z.B. mit dem Problem des relativen Vergleichs einsteigen.

In der 8. Jahrgangsstufe werden keine wesentlich neuen Beiträge zu dem Themenstrang *Zahlen und Größen* geleistet. Von besonderer Bedeutung ist jedoch die Distributivität in **Q** für die Termumformungen, vor allem bei den binomischen Formeln.

In der 10. Jahrgangsstufe wird die Potenzrechnung behandelt. Sie setzt das Quadrieren und Wurzelziehen aus der 9. Jahrgangsstufe fort, an das man hier gut anknüpfen kann.

Vorschläge

(1) Bei den Übergängen zwischen den Abschnitten eines Themenstrangs sollte ein Bezug zu einprägsamen Sachverhalten des Themenstrangs hergestellt werden, um deutlich zu machen, wie sich der neue Abschnitt in den Themenstrang einordnet.

(2) Um den Schülerinnen und Schülern deutlich zu machen, daß sich innerhalb eines Themenstrangs Probleme und Lösungen *entwickeln*, sollte an Probleme des vorangegangenen Abschnitts dieses Themenstrangs angeknüpft werden. Sie erfahren dabei, daß Wissen und Können auf anderem Wissen und Können aufbaut. Ihr Lernen kann ihnen dabei als *kumulatives Lernen* bewußt werden.

3.3 Zentrale Begriffe und Ideen der Themenstränge

(1) Leitbegriffe

Die Themenstränge sind nach *Begriffen* benannt. Sie stehen im Zentrum dieser Themen. Wenn man an Begriffe wie Zahl, Linie oder Wahrscheinlichkeit denkt, so handelt es sich um mathematisch grundlegende Begriffe, denen unterschiedliche Vorstellungen zugrundeliegen, die eine lange historische Entwicklung hinter sich haben und um die mächtige mathematische Theorien gebildet wurden. In den axiomatisch aufgebauten Theorien sind diese Begriffe in der Regel undefinierte Grundbegriffe, die durch die Axiome implizit definiert werden.

Will man diese Begriffe im Unterricht lehren, dann stellen diese axiomatisch aufgebauten Theorien jedoch kein geeignetes Lehrmuster dar. Vielmehr ist es notwendig, *langfristige Lernprozesse* zu organisieren, in denen sich Vorstellungen, Kenntnisse und Fähigkeiten über den Begriff bei den Lernenden entfalten können. In den Themensträngen übernehmen diese Begriffe die Rolle von *Leitbegriffen*.

Aus lerntheoretischer Sicht dienen Themenstränge dazu, langfristige Lernprozesse von grundlegenden mathematischen Begriffen zu organisieren. Umgekehrt wird die Behandlung eines Themenstrangs stark von dem intendierten langfristigen Lernprozeß bestimmt. Hier besteht also eine didaktisch interessante Wechselwirkung.

Wie das konkretisiert werden kann, wollen wir für den Themenstrang *Zahlen und Größen* zeigen. Wir betrachten dabei die Entwicklung dieses Themenstranges in der Grundschule und der Sekundarstufe I. Die entsprechenden Jahrgangsstufen mögen in einem Bundesland für einen bestimmten Schultyp abweichen. Wir geben hier einen Aufbau, den wir für sinnvoll halten. Der Leitbegriff ist der Begriff der *Zahl*.

In der Grundschule werden Grundvorstellungen zu den *natürlichen Zahlen* und Grundfähigkeiten im Rechnen mit ihnen vermittelt.

Die 5. Jahrgangsstufe setzt mit einem Reflexionsprozeß an, wenn gefragt wird, in welchen Situationen Zahlen auftreten, welche Beziehungen zwischen den Rechenoperationen bestehen und welchen Regeln das Rechnen folgt. Die Zahlen werden damit zu *Trägerinnen von Eigenschaften*.

Im Verständnis dieser Zahlen ersteigen die Schülerinnen und Schüler eine höhere Stufe. Wir sprechen hier von einem *Lernen in Stufen*.

Der Übergang von den natürlichen Zahlen zu den Bruchzahlen vollzieht sich in der 6. Jahrgangsstufe, indem den Schülerinnen und Schülern die durch die eingeschränkte Division gegebene Begrenzung der natürlichen Zahlen bewußt wird. Die Grenze wird nun überschritten. Dies geschieht nach dem Muster von EULER (1707-1783) dadurch, daß man zu Größen wechselt, die man teilen kann: Man gewinnt die Brüche. Größen wie $\frac{1}{2}$ h, $\frac{3}{4}$ l, $1\frac{1}{2}$ kg haben einen Sinn. An ihnen kann man die Bruchrechenregeln entdecken. In diesem Bereich kann man nun uneingeschränkt dividieren. Den Lernenden wird klar, daß sie mit den Bruchzahlen eine Begrenzung der natürlichen Zahlen überwunden haben. Zugleich sollte man ihnen bewußtmachen, daß die alten Regeln für natürliche Zahlen in den Bruchrechenregeln enthalten sind. Sie sehen also die „alt vertrauten" natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... als Bruchzahlen $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \ldots$ in neuem Licht. Es hat ein *Lernen durch Erweiterung* stattgefunden.

Die Übergänge von den Bruchzahlen zu den rationalen Zahlen in der 7. Jahrgangsstufe und von den rationalen zu den reellen Zahlen in der 9. Jahrgangsstufe kann man wiederum als *Lernen durch Erweiterung* interpretieren.

Dazwischen sehe ich in der 7. oder 8. Jahrgangsstufe bei der Begründung der Termumformungen mit Hilfe der Struktureigenschaften, durch die algebraische Beweise möglich werden, das Erreichen einer höheren Stufe: Es werden nun *Beziehungen zwischen den Eigenschaften* von Zahlen erkannt.

Das langfristige Lernen des Zahlbegriffs zeigt sich damit als ein Prozeß, in dem in den entscheidenden Phasen *Lernen in Stufen* oder *Lernen durch Erweiterung* stattfindet.

Literatur:

Für das *Lehren von Leitbegriffen* allgemein:
H.-J. VOLLRATH, *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht*, Stuttgart (Klett) 1984
Für die Leitbegriffe *Zahl* und *Funktion*:
H.-J. VOLLRATH, *Algebra in der Sekundarstufe*, Mannheim (BI) 1994
Für die *geometrischen Leitbegriffe*:
G. HOLLAND, *Geometrie in der Sekundarstufe*, Heidelberg (Spektrum) 1996

Für den Begriff des *Algorithmus:*
J. ZIEGENBALG, *Algorithmen*, Heidelberg (Spektrum) 1996

Für den Begriff der *Wahrscheinlichkeit:*

M. BOROVCNIK, *Stochastik im Wechselspiel von Intuitionen und Mathematik*, Mannheim (BI) 1992

(2) Fundamentale Ideen

Unter dem Einfluß des Pädagogen J. BRUNER wurde in der Mathematikdidaktik wiederholt der Versuch unternommen, den Mathematikunterricht um *fundamentale Ideen* herum zu organisieren. In der Literatur finden sich unterschiedliche „Kataloge“. Häufig genannt werden: Linearisieren, Approximieren, Messen, Optimieren, Modellbilden usw. Gegenüber den Leitbegriffen, die die inhaltliche Seite der Mathematik betonen, wird hier eher die methodische Seite der Mathematik angesprochen. Allerdings wirkt der Begriff der *fundamentalen Idee* etwas schillernd. Man braucht nur die sehr unterschiedlichen Kataloge zu betrachten.

Bei den von uns genannten Themensträngen kann man *Approximation* den fundamentalen Ideen zurechnen. Andererseits spielen in den einzelnen Themensträngen die fundamentalen Ideen für die Entwicklung von Problemstellungen und Lösungen eine wichtige Rolle. Man denke etwa an die Idee des *Modellbildens,* die häufig dazu benutzt wird, um Begriffsbildungen anzustoßen und in eine bestimmte Richtung zu weisen.

Wie sich eine fundamentale Idee als Themenstrang durch den Lehrgang ziehen kann, wollen wir am Beispiel der *Approximation* deutlich machen.

5. Jahrg.	6. Jahrg.	7. Jahrg.	8. Jahrg.	9. Jahrg.	10. Jahrg,
Runden, Schätzen, Überschlagen	Runden von Dezimalbrüchen, periodische Dezimalbrüche	Absoluter und relativer Fehler	Näherungsweises Berechnen von Potenzen mit dem binomi-schen Satz	Näherungsweises Wurzelziehen, Rechnen mit Näherungswerten	Näherungsweises Berechnen von π und von Funktionswerten: exp, log, sin

Man sieht, daß die Inhalte sehr dicht am Themenstrang *Zahlen und Größen* liegen. Im Hinblick auf die große Bedeutung der Approximation in den Anwendungen der Mathematik beim Rechnen mit dem Taschenrechner und dem Computer erscheint uns aber ein gesondert ausgewiesener Themenstrang *Approximation* sinnvoll. Weitere Hinweise zu diesem Themenstrang finden sich in: J. BLANKENAGEL, *Numerische Mathematik im Rahmen der Schulmathematik*, Mannheim (BI) 1985.

Wie man diese fundamentale Idee der Approximation in der Sekundarstufe II fortsetzen kann, läßt sich an folgendem Buch erkennen: E. WITTMANN, *Infinitesimalrechnung I, II in genetischer Darstellung,* Ratingen (Henn) 1973.

Literatur:

Einen guten Überblick über die Problematik gibt:

F. SCHWEIGER, *Fundamentale Ideen - Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik,* Journal für Mathematikdidaktik 13 (1992), S. 199-214

Der Auslöser war das Buch:

J. S. BRUNER, *Der Prozeß der Erziehung*, Düsseldorf (Schwann) 1980[5]

Für die fundamentale Idee des *Optimierens*:

H. SCHUPP, *Optimieren,* Mannheim (BI) 1992

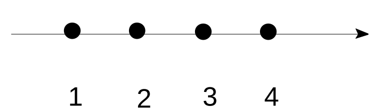
3.4 Zur Entwicklung der Themenstränge

(1) Bestand und Wandel

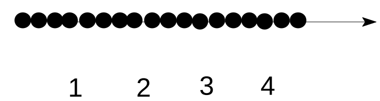
Die Themenstränge sind so angelegt, daß bei ihrer Behandlung gewisse Grundzüge beibehalten werden, daß aber andererseits deutliche Fortschritte sichtbar werden. Das ist für die Lernenden hilfreich: Einerseits erkennen sie Bekanntes wieder, an dem sie sich orientieren können; andererseits erfahren sie Neues, das ihr Interesse wecken kann. Wir wollen dieses Prinzip aus *Bestand und Wandel* wiederum am Themenstrang *Zahlen und Größen* deutlich machen.

Graphische Darstellung:

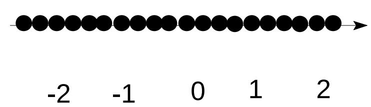
In der 5. Jahrgangsstufe werden die *natürlichen Zahlen* als *Punkte mit gleichmäßigen Abständen auf dem Zahlenstrahl* dargestellt.



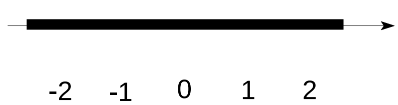
In der 6. Jahrgangsstufe werden die *Bruchzahlen* als beliebig dicht liegende Punkte auf dem Zahlenstrahl dargestellt. Der Zahlenstrahl bleibt, aber Punkte kommen neu hinzu.



In der 7. Jahrgangsstufe werden die *rationalen Zahlen* als *beliebig dicht liegende Punkte auf der Zahlengeraden* dargestellt. Dichte und Geradlinigkeit bleiben erhalten, aus dem Strahl ist aber nun eine Gerade geworden.



In der 9. Jahrgangsstufe werden die reellen Zahlen als *Menge zusammenhängender Punkte auf der Zahlengeraden* dargestellt. Die Zahlengerade bleibt, sie wird nun aber vollständig mit Punkten ausgefüllt.



Systemdarstellung:

Bestand und Wandel zeigen sich auch in der Entwicklung der Systemdarstellung der Zahlen.

N	$\ldots a_n \ldots a_1$
B	$\ldots a_n \ldots a_1, a_{-1} \ldots \overline{a_{-m} \ldots a_{-k}}$
Q	$\pm \ldots a_n \ldots a_1, a_{-1} \ldots \overline{a_{-m} \ldots a_{-k}}$
R	$\pm \ldots a_n \ldots a_1, a_{-1} \ldots a_{-m} \ldots$

Beim Übergang von **N** nach **B** wird die Dezimaldarstellung über das Komma nach rechts fortgesetzt. Man kann die Zahlen als unendliche periodische Dezimalbrüche darstellen. In **Q** kommen die Vorzeichen hinzu, in **R** müssen die Dezimalbrüche nicht mehr periodisch sein. Man sollte dabei deutlich machen, in welcher Weise jeweils die bekannte Darstellung in der neuen enthalten ist.

Rechenoperationen:

Im Vordergrund des Rechnens mit natürlichen Zahlen stehen die 4 *Grundrechenarten*. Sie setzen sich in den folgenden Zahlbereichen fort. Das wird besonders deutlich an den schriftlichen Rechenverfahren. Im Prinzip wird die Technik jeweils übertragen, doch sind gewisse Anpassungen notwendig: Beim Übergang zu **B** kommen Kommaregeln hinzu, beim Übergang zu **Q** Vorzeichenregeln, und in **R** muß man von „links nach rechts" rechnen, wenn man sich nicht auf rationale Näherungswerte beschränkt. Die *Fortsetzung der Algorithmen* erleichtert das Lernen ungemein.

Neben den vertrauten Rechenoperationen können die Schülerinnen und Schüler in den neuen Zahlbereichen auch neue Rechenoperationen kennenlernen, z.B. die Bildung des *arithmetischen* oder des *harmonischen* Mittels in **B** oder die Bildung des geometrischen Mittels in $\mathbf{R}^+$.

Aufgabenstellungen:

Durch die Rechenoperationen werden jeweils 3 Zahlen zueinander in Beziehung gesetzt:

$$a * b = c.$$

Indem man nach jeder der 3 Zahlen fragt, ergeben sich 3 *Grundaufgaben*. Die Lösbarkeit ist für die verschiedenen Rechenoperationen in den verschiedenen Zahlbereichen unterschiedlich. Die Schülerinnen und Schüler sollten also nicht nur diese Aufgaben jeweils lösen, sondern sie sollten auch das Prinzip erfassen, nach dem diese Aufgaben gebildet werden und welche typischen Fragestellungen sich bei ihnen ergeben. Im Prinzip sollten sie sich nach Entdeckung eines neuen Zahlbereichs derartige Aufgaben selbst stellen können.

Eigenschaften:

Bei der vertiefenden Behandlung der natürlichen Zahlen in der 5. Jahrgangsstufe werden den Schülerinnen und Schülern die Assoziativität und die Kommutativität von Addition und Multiplikation bewußt gemacht. Sie lernen die neutralen Elemente bezüglich der Addition und Multiplikation und die Distributivität kennen.

Diese Eigenschaften lassen sich auch bei den neuen Zahlbereichen feststellen. Dort kommen neue dazu: die Existenz der Inversen bezüglich der Multiplikation in **B** und die Existenz der Inversen bezüglich der Addition in **Q**. Mit der Untersuchung der neu entdeckten Zahlbereiche auf derartige Eigenschaften hin haben die Schülerinnen und Schüler eine *Forschungsroutine* gewonnen, die ebenfalls ihre Selbständigkeit fördert.

(2) Zunahme des Wissens

Das Kennenlernen neuer Objekte, neuer Beziehungen und neuer Eigenschaften vermehrt das Wissen der Schülerinnen und Schüler. Erwächst dies aus Fragestellungen, welche die Schüler interessieren, so wird es positiv gesehen. Freilich hat es in der Schule auch sofort die Kehrseite, abfragbares Wissen zu sein, was der Leistungsbeurteilung durch die Lehrkraft unterliegt. Wissenserwerb wird deshalb in der Schule von Schülerinnen und Schülern durchaus als etwas Zwiespältiges gesehen. Wichtig ist, daß sie das Wissen als etwas für sie Wertvolles erkennen und daß sie erfahren, wie man sich Wissen geschickt aneignet.

Die Orientierung des Unterrichts an Themensträngen zeichnet zunächst einmal bestimmte Inhalte aus. Das gilt für die Themen selbst, aber auch für ihre zentralen Inhalte. Themenstränge geben Schülerinnen und Schülern also einen Hinweis darauf, welche Themen mathematisch wichtig sind.

Innerhalb der Themenstränge leisten bestimmte Begriffe, Eigenschaften und Problemstellungen Wesentliches zur Entfaltung des Themas. Z.B. ist das Messen für Größen grundlegend, aus ihm ergibt sich nach Wahl einer Einheit die Maßzahl. Zwischen Maßzahl und Maßeinheit besteht eine enge Beziehung: Je größer die Einheit gewählt ist, desto kleiner wird die Maßzahl bei einer gegebenen Größe. Beim Addieren von gleichartigen Größen ergibt sich unmittelbar das Problem, daß man nur dann die Summe durch Addition der Maßzahlen erhält, wenn sie Summanden die gleiche

Einheit haben. Das wirft freilich die Frage auf, ob es bei zwei gleichartigen Größen überhaupt immer möglich ist, eine gemeinsame Einheit zu finden.

Die Schülerinnen und Schüler können die Erfahrung machen, daß aus Problemen neue Einsichten erwachsen, die wiederum neue Probleme erzeugen. Beim Arbeiten innerhalb eines Themenstrangs erfahren sie durch die enge *Kopplung zwischen Problem und Einsicht* Wissen als etwas Wertvolles.

Dadurch daß neue Wissenselemente mit zentralen Wissenselementen verbunden werden, entsteht eine *Wissensstruktur*, die das Verstehen ermöglicht und die Aneignung des Wissens erleichtert. Indem die Lehrkraft den Schülerinnen und Schülern das deutlich macht, gibt sie ihnen zugleich eine Hilfe, wie man sich Wissen ökonomisch aneignen und es bewahren und weiterentwickeln kann.

(3) Zuwachs an Können

Können macht sich im Mathematikunterricht meist am Lösen von Aufgaben fest. In vielen mathematischen Bereichen werden zunächst typische *Grundaufgaben* gestellt. Wir hatten oben gesehen, daß es eine Hilfe für die Schülerinnen und Schüler ist, wenn sie das Zustandekommen derartiger Aufgaben durchschauen. Das Lösen von Grundaufgaben stellt im allgemeinen keine sehr hohen Anforderungen an die Lernenden. Um sie davor zu bewahren, diese Aufgaben und ihre Lösungen nicht ernst zu nehmen, sollte ihnen bewußtgemacht werden, daß Grundaufgaben als Basis für komplexere Aufgaben unbedingt beherrscht werden müssen.

Im Laufe der Schulzeit lernen die Schülerinnen und Schüler in den einzelnen Themenkreisen, immer mehr Grundaufgaben zu lösen. Dabei kann ihnen eine Hilfe sein, wenn die Grundaufgaben in unterschiedlichen Kontexten immer wieder auftreten, wie wir das oben gesehen haben. Sie erleben das als einen *Zuwachs an Können*.

Auch für das Erzeugen komplexerer Aufgaben aus Grundaufgaben gibt es typische Techniken. Nehmen wir z.B. die Grundaufgaben zu den 4 Grundrechenoperationen der natürlichen Zahlen. Eine einfache Steigerung der Addition ist das Addieren von mehr als zwei Zahlen. Auch Aufgaben, in denen zunächst multipliziert und dann addiert werden soll, haben durch ihre Kombination der Operationen eine höhere Komplexität. Die höhere Komplexität stellt eine *Steigerung der Schwierigkeit* dar. Wenn andererseits den Schülerinnen und Schülern klar ist, wie diese Aufgaben auf die Grundaufgaben zurückgeführt werden können, dann erfahren sie in der Bewältigung komplexerer Aufgaben einen deutlichen Zuwachs an Können.

Es macht einen besonderen Reiz der Mathematik aus, daß man in einfach zu formulierenden Aufgaben immer wieder vor Situationen gestellt ist, bei denen der Lösungsweg nicht unmittelbar zu erkennen ist. In diesem Fall spricht man von einem *Problem*. Ein erstes (kleines) Problem könnte z.B. bei der Addition natürlicher Zahlen sein, ob man jede natürliche Zahl in die Summe zweier gleicher natürlicher Zahlen zerlegen kann.

Probleme sind also Aufgaben, die den Problemlösenden einen gewissen Widerstand entgegensetzen. Eine solche Situation stellt für viele Menschen einen Anreiz dar, sich näher mit der Aufgabe auseinanderzusetzen. Vergebliche Lösungsversuche können zwar Frustrationen auslösen. Andererseits erfüllt einen die schließlich gefundene Lösung mit Freude, durch die man für die zunächst vergeblichen Bemühungen belohnt wird. Ein selbst gelöstes Problem vermittelt also ein *Erfolgserlebnis*. Themenstränge bieten in er Regel zahlreiche Ansatzpunkte für anregende Probleme. Auch beim Problemlösen können die Schülerinnen und Schüler einen Zuwachs an Können erleben.

Literatur:

Für das Problemlösen ist der Klassiker

G. POLYA, *Schule des Denkens*, Bern und München (Francke) 1980[3]

Eine ausführliche didaktische Darstellung der Problematik:

P. BAPTIST, *Elemente einer neuen Aufgabenkultur*, Bayreuth (BLK-Projekt) 1998

Vorschläge

(1) Während der Arbeit innerhalb eines Themenstrangs sollte man die Schülerinnen und Schüler immer wieder darauf hinweisen, worin Inhalte und Fragestellungen mit früher Behandeltem übereinstimmen und worin das Neue besteht. Sie sollten also immer wieder *Bestand und Wandel* erfahren.

(2) Wissen sollte den Schülerinnen und Schülern in einem Themenstrang als *strukturiertes Wissen* vermittelt werden, so daß sie es verstehen und sich leichter aneignen können. Dabei sollen sie auch lernen, Wichtiges von weniger Wichtigem zu unterscheiden.

(3) Die Schülerinnen und Schüler sollten typische Grundaufgaben kennenlernen und erfahren, inwiefern es sich bei ihnen um Grundaufgaben handelt. Sie sollten darüber hinaus lernen, komplexere Aufgaben auf Grundaufgaben zurückzuführen und so die *Aufgabenstruktur eines Themenstrangs* kennenlernen. Dabei sollten sie auch lernen, sich selbst Aufgaben zu stellen.

Immer wieder sollten sie sich auch mit dem Lösen von einschlägigen Problemen befassen. Dabei sollten sie zugleich *Einsichten in die Heuristik* gewinnen.

4. Themenkreise gestalten

4.1 Durch Themenkreise Verbindungen schaffen

(1) Themenwechsel

Schulbücher sind so aufgebaut, daß der Unterricht im Prinzip nach ihnen ablaufen kann. Das Inhaltsverzeichnis des Lehrbuchs für die 5. Jahrgangsstufe, das wir oben betrachtet haben, zeigt, daß im Laufe eines Schuljahres immer wieder ein *Themenwechsel* angesagt ist. Dafür gibt es mehrere Gründe.

- Die unterschiedlichen Themenstränge, die im Laufe eines Schuljahrs zu behandeln sind, erfordern zwangsläufig immer wieder einen Themenwechsel.
- Ein Themenwechsel ist aber auch erwünscht, denn die Schülerinnen und Schüler sollen die Vielfalt der Mathematik erfahren.
- Die verschiedenen Themen sprechen Schülerinnen und Schüler entsprechend ihren Fähigkeiten und Neigungen unterschiedlich an. Jeder sollte im Unterricht einmal die Chance haben, daß sein Lieblingsthema drankommt.
- Auch die Lehrkräfte haben ihre Lieblingsthemen und Themen, die ihnen weniger liegen. Sie sollten sich weder bei einem Thema „austoben“ noch sich vor einem anderen „drücken“ können.
- Die andauernde Beschäftigung mit einem Thema ermüdet Lehrende und Lernende. Ein Themenwechsel belebt den Unterricht.

Soll man abrupt umschalten: „So, jetzt haben wir genug Gleichungen gelöst, jetzt wollen wir mal etwas ganz anderes machen!“ Oder soll man eine Überleitung suchen: „Nachdem wir gelernt haben, quadratische Gleichungen zu lösen, wollen wir jetzt sehen, was wir mit ihnen in der Geometrie anfangen können!“ Die erste Äußerung kann regelrecht befreiend wirken, während die zweite vielleicht das große Gähnen auslöst. Gefordert ist also „Mut zum Neubeginn“.

(2) Durch Sichtwechsel neue Verbindungen erkennen

Wechseln wir also *abrupt* von den quadratischen Gleichungen zu den Parabeln. Dann wird uns nach einiger Zeit die Frage beschäftigen, welche Lagen zwischen Parabel und Gerade möglich sind. Sie wird zunächst anschaulich geometrisch, zweckmäßig unter Verwendung des Computers oder eines Graphikrechners, behandelt. Dann wird man sie aber algebraisch angehen und landet damit doch wieder bei den quadratischen Gleichungen. Hat man die Schülerinnen und Schüler

„an der Nase herumgeführt“? Sicher nicht, denn in der Geschichte der Mathematik wurden immer wieder Entdeckungen gemacht, durch die man plötzlich Verbindungen zwischen scheinbar ganz verschiedenen Gebieten entdeckte. Immerhin dauerte es ja etwa 2000 Jahre bis man erkannte, daß man die *geometrische* Frage der möglichen Lage einer Geraden zur Parabel *algebraisch* entscheiden konnte. In diesem Fall führte die Erfindung einer *neuen Methode* zu einer Verbindung zwischen unterschiedlichen Gebieten.

Auch durch *neue Fragestellungen* können überraschende Verbindungen hergestellt werden. Man denke etwa an das Problem, welches Rechteck unter allen Rechtecken gleichen Umfangs den größten Flächeninhalt hat. Das ist ein Optimierungsproblem. Man kann es mit Hilfe der Algebra in das Problem transformieren, an welcher Stelle eine Parabel ihren höchsten Punkt hat.

(3) Lernen durch Schaffen von Verbindungen

Kürzlich meldete dpa:

> „Die elfjährige Christiane starrt minutenlang regungslos auf ein Blatt Papier: Zahlen, nichts als Zahlen, die sie sich bei der ersten deutschen Junioren-Gedächtnismeisterschaft einprägen muß. Dabei spielen sich in Christianes Kopf mit den poppig-rotgefärbten Haaren ungewöhnliche Gedanken ab. ‚13-15-18. Eine Katze fährt mit dem Fahrstuhl in den Vogelkasten.‘ Mit solchen Eselsbrücken merken sich die Wettstreiter endlose Zahlenfolgen und spulen sie fehlerlos wieder ab.“

Beim Einprägen von Zahlenkolonnen werden den Zahlen Worte zugeordnet. Durch eine Geschichte wird *Sinn gestiftet*, so daß man sich die Worte in der richtigen Reihenfolge merken und damit dann die Ziffernfolge korrekt reproduzieren kann. Sinn wird hier durch das Schaffen gedanklicher Verbindungen erzeugt.

Auch für das Verstehen komplexerer Sachverhalte gilt, daß Verbindungen erkannt oder geschaffen werden müssen. Es ist deshalb das Bestreben im Mathematikunterricht, möglichst viele Verbindungen zwischen den unterschiedlichen Gebieten herzustellen.

Verbindungen zwischen Themensträngen werden in einer Jahrgangsstufe durch *Themenkreise* hergestellt. Sie können für die Lernenden in einer gedanklichen *Überleitung* bei einem Themenwechsel sichtbar werden. Das kann aber auch in einer *Reflexion* geschehen.

Organisatorisch sind unterschiedliche Formen möglich: Es wird ein Zusammenhang zwischen Sequenzen zu verschiedenen Themensträngen hergestellt (*Überleitung*), oder es wird eine Unterrichtssequenz konzipiert (*Reflexion*), in der Inhalte und Methoden verschiedener Themenstränge miteinander kombiniert werden.

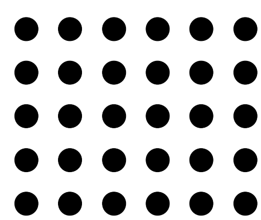
Auch Formen des *offenen* Mathematikunterrichts sind für Themenkreise geeignet. Hier ist z.B. an *Lernzirkel* zu denken, bei denen die einzelnen Stationen Verbindungen zwischen den Themensträngen herstellen. Auf die Organisationsformen wollen wir nicht näher eingehen. Im folgenden sollen Problemstellungen skizziert werden, die zur Gestaltung von Themenkreisen geeignet sind.

4.2 Anregungen für Themenkreise

(1) Geschicktes Zählen

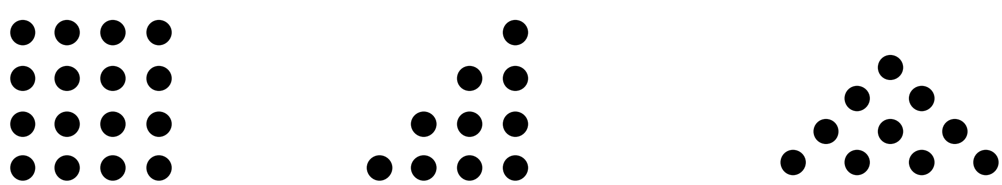
In der 5. Jahrgangsstufe hat der Themenkreis *Zahlen und Größen* traditionell das stärkste Gewicht. Dort wird auch nochmals betont, daß die natürlichen Zahlen zum Zählen verwendet werden. Die Frage nach Möglichkeiten, wie man geschickt zählen kann, berührt auch Sachverhalte aus anderen Themenkreisen.

Beginnen wir etwa mit der Anzahl der Negerküsse in einer Packung. Die Frage läuft darauf hinaus, die Plättchen in einem Muster wie in der Figur zu zählen.



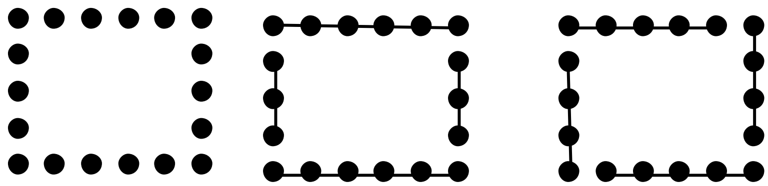
Das Muster enthält 5 Reihen zu je 6 Plättchen, also $5 \cdot 6 = 30$ Plättchen.

Man kann andere Muster bilden wie:



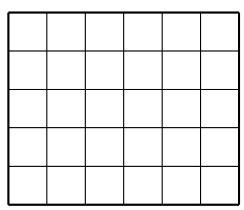
Hierbei treten Formen auf, die im Themenstrang *Figuren und Körper* behandelt wurden.

Variiert man die Aufgabe etwas und läßt die Anzahl der Plättchen auf dem Rand des Rechtecks bestimmen, so kann man unterschiedliche Symmetrien ausnützen. Damit ist man beim Themenstrang *Abbildungen und Symmetrien*.



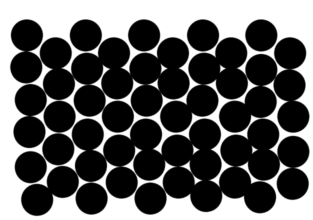
$2 \cdot 6 + 2 \cdot 3$ $\quad$ $2 \cdot 5 + 2 \cdot 4$

Die Problematik des geschickten Zählens tritt schließlich auch bei dem Problem auf, wie viele Zentimeterquadrate in das Rechteck bzw. wie viele Zentimeterwürfel in einen Quader passen. Damit ist eine Brücke zum Themenstrang *Flächen- und Rauminhalte* geschlagen.



$5 \cdot 6$ Einheitsquadrate

Gibt man eine große Zahl von Plättchen vor, bei der das Abzählen mühsam wäre, so kann man die Anzahl abschätzen, indem man die Plättchen in etwa in einem Rechteck anordnet, die Plättchen an den Rändern zählt und diese Anzahlen multipliziert. Dieses Vorgehen würde zum Themenstrang *Approximation* passen.



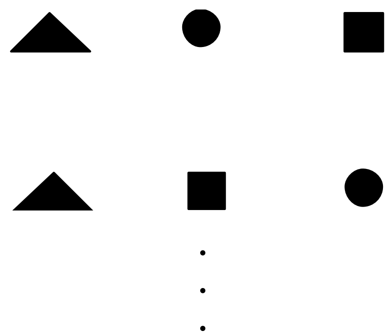
Etwa $6 \cdot 10 = 60$ Plättchen

Wie viele sind es genau? Wie hoch wird der Fehler sein?

Ein kombinatorisches Problem, das man dem Themenstrang *Wahrscheinlichkeit* zuordnen könnte, wäre:

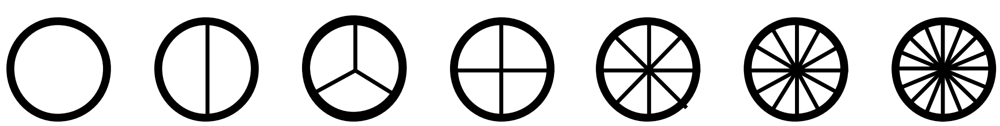
Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein Dreieck, einen Kreis und ein Quadrat nebeneinander zu legen?

Man könnte es mit Hilfe eines „Baumes" lösen.



(2) Kreis teilen

In der 6. Jahrgangsstufe spielt in der Bruchrechnung im Themenstrang *Zahlen und Größen* das „Tortenmodell" eine wichtige Rolle. Zur Veranschaulichung der verschiedenen Bruchteile ist eine Torte nach Augenmaß unterschiedlich zu teilen: in 2, in 3, in 4 in 8, in 12, vielleicht auch in 16 gleich große Teile. Es handelt sich dabei um Näherungslösungen, womit ein Bezug zum Themenstrang *Approximation* besteht.

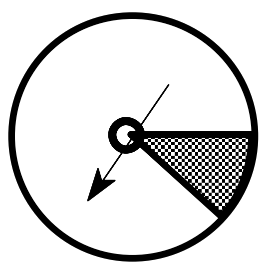


Beobachtet man eine Konditorin, wie sie eine Torte in 12 Stücke zerschneidet, dann fällt auf, daß sie sich dabei die Torte zurechtdreht. Dies weist auf eine Verbindung zum Themenstrang *Abbildungen und Symmetrien* hin.

Die Konditorin schafft es sogar, eine Torte in 14 gleich große Stücke zu zerlegen. Wie macht sie das? Nun, sie hat eine Schablone, einen sogenannten Tortenteiler, die sie auf die Torte legt. Die Schablone bringt dort Markierungen an, wo sie mit dem Messer schneiden muß.

Geometrisch bedeutet das, einen Kreis in 14 gleich große Kreisausschnitte zu zerlegen. Man braucht dazu nur das Maß des Vollwinkels von 360° durch 14 zu dividieren. Die Division von 360° durch 14 liefert einen periodischen Dezimalbruch. In diesem Kontext treten die Begriffe Kreis, Kreisausschnitt, Winkel und Winkelmaß auf, die zum Themenstrang *Figuren und Körper* gehören. Man kann dieser Problemstellung schnell erheblichen mathematischen Tiefgang geben, wenn man etwa der Frage nachgeht, welche der bekannten Konstruktionen der ebenen Geometrie zu Kreisteilungen mit Zirkel und Lineal verwendet werden können und welche Teilungen sich bei ihnen ergeben. Mit dieser Frage hängt auch die praktische geometrische Frage zusammen, wie man die Gradeinteilung auf dem Winkelmesser erzeugen kann.

Für Glücksräder kann man über die Anteile der Felder die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ausfälle bestimmen.



Man erhält damit eine Problemstellung aus dem Themenstrang *Wahrscheinlichkeit*.

(3) Zuordnungen

Im ersten Halbjahr der 7. Jahrgangsstufe stehen Prozent- und Zinsrechnung sowie *proportionale* und *antiproportionale* Funktionen (auch *umgekehrt proportionale* Funktionen genannt) im Vordergrund.

Zunächst geht es in der Prozent- und Zinsrechnung um relativen Vergleich. Eine moderne Behandlung knüpft hier an die Bruchrechnung und das Rechnen mit Dezimalbrüchen an. Dann wird aber auch der Aspekt immer wichtiger, Vorgänge der Zunahme oder der Abnahme zu betrachten. Die Beziehung zwischen Grundwert- und Endwert, zwischen Anfangs- und Endkapital kann man als *Zuordnung* sehen. Damit wird eine Brücke vom Themenstrang *Zahlen und Größen* zum Themenstrang *Funktionen* geschlagen.

Das Wachsen eines Kapitals bei Zins und Zinseszins kann man mit dem Taschenrechner gut sukzessive verfolgen. Damit kann man zugleich eine neue Einsicht über *Algorithmen* gewinnen (K_0: Anfangskapital, K_i: Kapital nach i Jahren, $q = 1 + \frac{p}{100}$: Zinsfaktor).

$$K_0 \xrightarrow{\cdot q} K_1 \xrightarrow{\cdot q} K_2 \xrightarrow{\cdot q} K_3 \xrightarrow{\cdot q} K_4 \xrightarrow{\cdot q}$$

Betrachtet man bei einem Rechteck bei konstanter Breite den Flächeninhalt in Abhängigkeit von der Länge, so ergibt sich eine proportionale Funktion. Bei konstantem Flächeninhalt ist die Abhängigkeit zwischen Länge und Breite eine antiproportionale Funktion. Man stellt damit eine Verbindung zum Themenstrang *Flächen- und Rauminhalte* her.

In der Geometrie steht in der 7. Jahrgangsstufe im Themenstrang *Figuren und Körper* die Erarbeitung von Figureneigenschaften im Vordergrund. Das geschieht heute meist in enger Verbindung mit *Abbildungen und Symmetrien*. Auch bei Abbildungen handelt es sich um *Zuordnungen*. Damit ist eine Brücke zu den Funktionen geschlagen.

(4) Analytische Geometrie

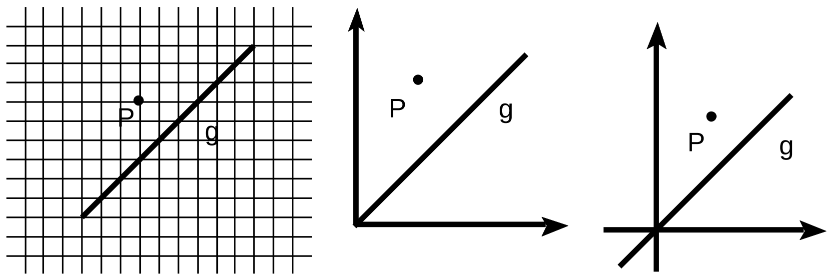
In der 5.-7. Jahrgangsstufe ist die analytische Geometrie in mancher Hinsicht vorbereitet worden:

- Früh wurde begonnen, Geometrie im Karogitter zu betreiben. Damit waren Koordinaten zwar noch nicht explizit erforderlich. Doch wurden die Schülerinnen und Schüler darauf vorbereitet, wenn sie z.B. Figuren von einer Vorlage möglichst getreu ins Karogitter ihres Hefts übertragen sollten.

- Im Zusammenhang mit Funktionsbetrachtungen wurde in der 7. Jahrgangsstufe vor Einführung der negativen Zahlen das Achsenkreuz eingeführt. Die Koordinatenachsen waren Halbgeraden, denn es standen nur die Bruchzahlen als Koordinaten zur Verfügung.

- Als Graphen proportionaler Funktionen ergaben sich Halbgeraden durch den Ursprung.

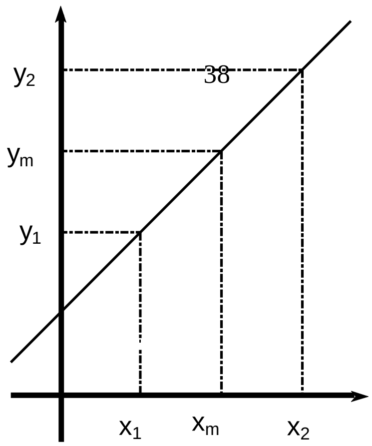
Nachdem in der zweiten Hälfte der 7. Jahrgangsstufe die negativen Zahlen eingeführt wurden und die Erarbeitung der Vorzeichenregeln im Vordergrund stand, besteht nun in der 8. Jahrgangsstufe die Möglichkeit, das Koordinatensystem zu erweitern. Das liefert bei der Behandlung der verschiedenen Themenstränge wichtige Beiträge.



In der Geometrie wird es im Themenstrang *Figuren und Körper* nun möglich, jedem Punkt der Ebene eineindeutig ein Koordinatenpaar zuzuordnen. Damit können Geraden und Lagebeziehungen zwischen ihnen analytisch behandelt werden.

Für Kongruenzabbildungen können im Themenstrang *Abbildungen und Symmetrien* zu Punkten die Koordinaten ihrer Bildpunkte angegeben werden. Damit lassen sich auch einfache Symmetrien analytisch nachweisen.

Proportionale Funktionen werden nun auch für negative Argumente betrachtet und als Sonderfälle linearer Funktionen erkannt. Für sie werden Funktionsgleichungen gefunden, so daß nun auch Eigenschaften von Funktionen mit algebraischen Methoden nachgewiesen werden können. So könnte z.B. nachgewiesen werden, daß durch eine lineare Funktion Mitte auf Mitte abgebildet wird.



$$f(x_m) \;=\; f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \;=\; m\,\frac{x_1+x_2}{2}+b \;=\; \frac{m\,x_1+mx_2+2\,b}{2}$$
$$=\; \frac{m\,x_1+b+mx_2+b}{2} \;=\; \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \;=\; \frac{y_1+y_2}{2} \;=\; y_m$$

Diese Betrachtungen stellen also einen wesentlichen Fortschritt im Themenstrang *Funktionen* dar.

Beim Arbeiten mit Geradengleichungen werden die Rechenregeln für rationale Zahlen wiederholt, so daß damit auch Bezüge zum Themenstrang *Zahlen und Größen* vorhanden sind.

Über Schnittaufgaben bei Geraden führt man schließlich zu den linearen Gleichungssystemen hin. Damit wird auch ein wichtiger Beitrag zum Themenstrang *Terme und Gleichungen* geleistet.

Zur Behandlung dieses Themenkreises gehören natürlich *historische Ausführungen*, in denen man besonders auf die Leistungen von RENÉ DESCARTES (1596-1650) eingehen wird.

Literatur

Für die grundlegenden didaktischen Probleme des Übergangs von der Elementargeometrie zur analytischen Geometrie:

H. STRUVE, *Grundlagen einer Geometriedidaktik*, Mannheim (BI) 1990

Zu Descartes z.B.:

E. T. BELL, *Die großen Mathematiker*, Düsseldorf (Econ) 1967

(5) Quadratisches

Stand in der 8. Jahrgangsstufe bei den Betrachtungen zur analytischen Geometrie das *Lineare* im Vordergrund, so wird uns nun in der 9. Jahrgangsstufe das *Quadratische* besonders beschäftigen.

Im Vordergrund des Themenstrangs *Zahlen und Größen* steht die Entdeckung der irrationalen Zahlen und damit die Einführung der reellen Zahlen. Sie entzündet sich beim Thema *Quadrieren und Wurzelziehen* an der Frage, ob man Wurzeln wie $\sqrt{2}$ „genau“ bestimmen kann.

Dies führt zugleich zum Themenstrang *Approximation*, bei dem die Intervallschachtelungen eine besondere Rolle spielen.

Bei der Suche nach einem möglichst schnellen Näherungsverfahren stößt man auf den Heron-Algorithmus und hat damit einen Beitrag zum Themenstrang *Algorithmen*.

Beim Quadrieren wird einer Zahl ihr Quadrat zugeordnet. Es handelt sich dabei um eine Funktion. Diese Sicht führt auf die quadratischen Funktionen und damit zum Themenstrang *Funktionen*.

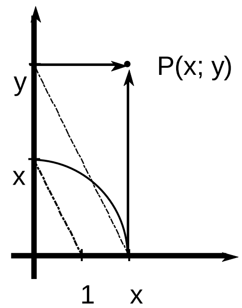
Betrachtet man die Graphen quadratischer Funktionen, so erhält man die *Parabeln*. Damit hat man ein neues geometrisches Objekt gefunden, das in den Themenstrang *Figuren und Körper* paßt. Merkwürdigerweise wird die Parabel im Unterricht von den Schülerinnen und Schülern aber meist gar nicht als *geometrisches* Objekt wahrgenommen, sondern - durch die Behandlung als Graphen von Funktionen - der Algebra zugerechnet (WETH 1993). Man kann den geometrischen Charakter der Parabel dadurch betonen, daß man aus der Gleichung

$$y = x^2$$

z.B. mit Hilfe des Strahlensatzes, der ja in dieser Jahrgangsstufe im Themenstrang *Figuren und Körper* behandelt wird, eine Konstruktionsvorschrift entwickelt. Man formt dazu für $x^{1}0$ und $y^{1}0$ die Gleichung um in

$$1:x = x:y,$$

zeichnet die entsprechenden Strecken in das Achsenkreuz ein, so daß man die zugehörige Strahlensatz-Figur und damit zu gegebenem x das gesuchte y konstruieren kann. Mit Hilfe eines Geometrie-Programms läßt sich das am Computer sehr schön realisieren.



Schließlich sollte man die Parabel auch auf Eigenschaften untersuchen. Auffällig ist ihre Achsensymmetrie, mit der man auch den Scheitel als Schnittpunkt der Parabel mit ihrer Achse definieren kann. Man ist also beim Themenstrang *Abbildungen und Symmetrie*.

Literatur

Zum Problem des *Schubladendenkens* in Geometrie und Algebra:

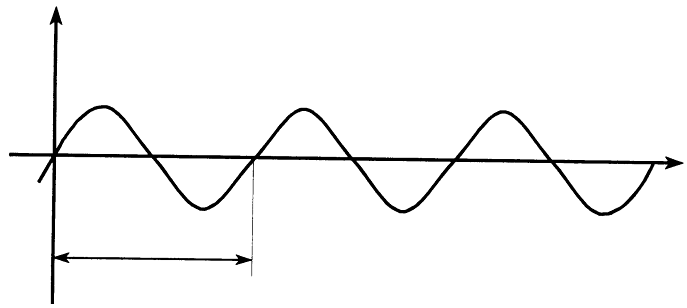
T. WETH, *Zum Verständnis des Kurvenbegriffs im Mathematikunterricht,* Hildesheim (Franzbecker) 1993

(6) Bestimmung von Funktionswerten

In der 10. Jahrgangsstufe lernen die Schülerinnen und Schüler eine ganze Reihe neuer Funktionstypen kennen: Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktionen, trigonometrische Funktionen. Dies läßt sich dem Themenstrang *Funktionen* zuordnen.

Die Potenzfunktionen, die Exponentialfunktionen und die Logarithmusfunktionen erwachsen aus der Potenzrechnung, die zum Themenstrang *Zahlen und Größen* gehört.

Die trigonometrischen Funktionen dagegen sind mit der Trigonometrie verbunden, die zum Themenstrang *Figuren und Körper* gehören. Sie sind dort mit Hilfe von Streckenverhältnissen erklärt. Ihre Graphen sind wiederum geometrische Objekte, die bestimmte Eigenschaften haben. Am auffälligsten an der Sinuskurve z.B. sind ihre Symmetrien, was wiederum zum Themenstrang *Abbildungen und Symmetrien* paßt. Häufig wird allerdings ihre Verschiebungssymmetrie (als Kurveneigenschaft) übersehen und nur als Periodizität (Funktionseigenschaft) angesprochen.



Ein Problem, das sich bei diesen Betrachtungen immer wieder stellt, ist die *Bestimmung von Funktionswerten* für diese Funktionen. Man kann hier Näherungsverfahren nicht vermeiden. Diese können in dieser Jahrgangsstufe numerisch (z.B. in der Potenzrechnung) oder zeichnerisch (z.B. in der Trigonometrie) sein. In jedem Fall gehören sie zum Themenstrang *Approximation*.

Literatur

Eine Fülle von Anregungen zu diesem Thema kann man dem Klassiker entnehmen:

K. KOMMERELL, *Das Grenzgebiet der elementaren und höheren Mathematik,* Leipzig (Koehler) 1936

5. Themenkomplexe

5.1 Lebenssituationen im Rechen- und Raumlehreunterricht

In alten Rechenbüchern für Volksschulen findet man häufig Situationen aus dem täglichen Leben als Themen des *Rechen- und Raumlehreunterrichts*: „Wir gehen einkaufen“, „Unterwegs mit der Eisenbahn“, „Auf dem Markt“, „Sparen“, „Saat und Ernte“, „Wir legen einen Garten an“ usw.

Das erklärt sich aus den Zielsetzungen, den Inhalten und der Methodik:

- Der Rechen- und Raumlehreunterricht sollte durch *Lebensnähe* einen Beitrag zur Vorbereitung der jungen Menschen auf das Leben leisten.
- In den Abschlußklassen beschränkte sich der Unterricht auf die *Grundrechenarten*, auf den *Dreisatz* und die *Berechnung von Flächen- und Rauminhalten*. Im wesentlichen ging es also um Anwendung der gelernten Verfahren auf unterschiedliche Lebenssituationen.
- Durch den ständigen Gebrauch der wenigen Verfahren konnte man ein hohes Maß an Sicherheit in ihrer Handhabung erreichen.

Dem standen allerdings auch einige gravierende Nachteile gegenüber. Sie betrafen vor allem das Problem der Lebensnähe, das sich in ähnlicher Weise auch in den anderen Schularten stellte.

- Um die Schülerinnen und Schüler nicht zu überfordern, war es notwendig, die Zahlen so zu wählen, daß die Rechnung zu bewältigen waren.
- Die Lebenssituationen wurden in den Schulbüchern in Aufgabentexte eingebunden. Damit wurde es den Schülerinnen und Schülern erleichtert zu erkennen, was gegeben, was gesucht und auf welchem Wege es zu berechnen war.
- Die Aufgaben wurden in der Regel so formuliert, daß sie *genau* die benötigten Angaben enthielten.

Die Schwierigkeiten mit den realistischen Zahlen ist heute allerdings weitgehend überwunden durch die mögliche Verwendung von *Taschenrechnern* im Mathematikunterricht.

Aus dem Rechen- und Raumlehreunterricht ist auch an Grund- und Hauptschulen *Mathematikunterricht* geworden. Das führte in den siebziger Jahren dazu, daß nun in allen Schularten, mathematische Themen dominierten. Dem lag die Idee zugrunde, daß es angesichts der vielfältigen Lebenssituationen der modernen Welt unmöglich sei, die Schülerinnen und Schüler auf jede dieser Situationen vorzubereiten. Wenn es gelänge, ihnen die Fähigkeit zu vermitteln, in komplexen Lebenssituationen die mathematische Struktur der Probleme zu erkennen und die Probleme dann zu lösen, hätte man eine Chance, sie auf die mathematischen Anforderungen des modernen Lebens vorzubereiten.

5.2 Strukturelle oder bereichsspezifische Behandlung von Lebenssituationen

Die Idee des strukturellen Bewältigung von Lebenssituationen erhielt durch empirische Befunde in den USA (LAWLER 1980) einen erheblichen Dämpfer. Es zeigte sich, daß sich die Schülerinnen und Schüler in ihrer Umwelt anders verhielten als in der „Mathewelt“. Sie verwendeten Lösungswege, die der jeweiligen Situation entsprachen, also *bereichsspezifisch* waren. Es bestand also häufig ein Konflikt zwischen den *subjektiven Erfahrungsbereichen* (BAUERSFELD 1983) der Schülerinnen und Schüler und der von den Lehrkräften im Unterricht gestalteten mathematisch geprägten Wirklichkeit. Es gab auch ganz konkrete Kritik vor allem durch die Industrie- und Handelskammern an den unzureichenden Rechenfähigkeiten der Hauptschulabgänger.

Seit Anfang der neunziger Jahre finden sich nun in den *Lehrbüchern* aller Schularten neben den mathematisch bestimmten Lerneinheiten auch auf Lebenssituationen bezogene Lerneinheiten. Verstärkt wird dies noch durch *offene* Formen des Mathematikunterrichts. Hier haben sich vor allem *Projekte* im Mathematikunterricht als eine besonders geeignete Organisationsform erwiesen. In Projekten kann man auch weitgehend die übrigen Schwierigkeiten eines lebensnahen Mathematikunterrichts überwinden, die wir oben genannt hatten.

Literatur

Zur Wiederentdeckung des *Bereichsspezifischen* im Mathematikunterricht:

H. BAUERSFELD, *Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens,* in: H. BAUERSFELD u.a. (Hrsg), Lernen und Lehren im Mathematikunterricht, Köln (Aulis) 1983, 1-56

Für die theoretische Grundlage dieses Ansatzes:

W. LAWLER, *The progressive construction of mind*, Cognitive Science 5 (1980), 1-30

Zur Behandlung von *Projekten* im Mathematikunterricht:

M. LUDWIG, *Projekte im Mathematikunterricht,* Hildesheim (Franzbecker) 1998

5.3 Ein Beispiel für einen Themenkomplex

Lebenssituationen, in denen unterschiedliche mathematische Verfahren zur Lösung von Problemen benötigt werden, können zu *Themenkomplexen* im Mathematikunterricht werden.

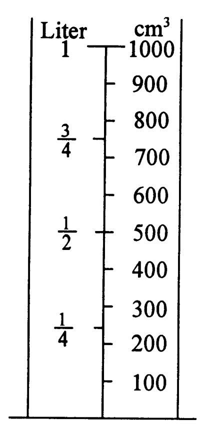
Die Behandlung von Themenkomplexen ist zweckmäßig:
- zu Beginn eines Schuljahres als Einstimmung und zur Bereitstellung benötigten Wissens,
- zum Ende eines Schuljahres, um Aufgaben aus möglichst vielen in dem Schuljahr und behandelten Gebieten in einem Thema zu sichern,
- im Schuljahr, um das bis dahin erworbene mathematische Wissen und Können aufzufrischen.

Im folgenden geben wir ein Beispiel für die 10. Jahrgangsstufe an, das sich auch als Thema eines *Projekts* eignet. Im Mittelpunkt stehen

Haushaltsmeßbecher.

1. Analyse eines zylinderförmigen Meßbechers

1. Aufgabe: Bei dem dargestellten zylindrischen Meßbecher ist die Markierung für 1 l in einer Höhe von 20 cm angebracht.
a) Weshalb muß die Markierung für ½ l in halber Höhe sein?
b) In welcher Höhe befinden sich die Markierungen für 100 cm^3, 200 cm^3, 500 cm^3? Kontrolliere das an der Figur.
c) Wie hoch steht die Flüssigkeit bei 250 cm^3, 750 cm^3? Kontrolliere das an der Figur.



In dieser Aufgabe wird die **Proportionalität**

Höhe → Volumen

beim Zylinder angesprochen. Die Berechnungen sollen nach dem vertrauten **Schema** erfolgen. Die Schülerinnen und Schüler sollten daran gewöhnt werden, ihre Berechnungen zu kontrollieren.

2. Aufgabe: Wie groß ist der Durchmesser des Meßbechers?

Da man z.B. für das Volumen V = 1 l die Höhe h = 20 cm kennt, kann man aus der **Formel** $V = \pi r^2 h$ zunächst r und dann d ausrechnen.

3. Aufgabe: Besorge einen zylindrischen Meßbecher. Miß die Höhe und den Durchmesser bei 1 l. Berechne das Volumen und vergleiche mit 1 l.

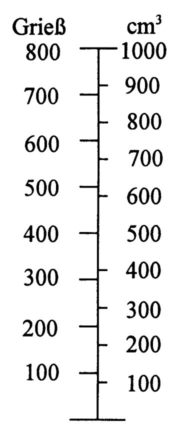
Bisher bezogen sich die Aufgaben auf eine Skizze, so daß die Betrachtungen weitgehend theoretisch waren. Die Schülerinnen und Schüler sollten nun die Möglichkeit erhalten, selbst **Erfahrungen durch Handlungen** mit einem konkreten Meßbecher zu sammeln.

4. Aufgabe: Auf dem Meßbecher befinden sich weitere Skalen.

a) Was kann man mit der Skala für Grieß bestimmen ?

b) Wieviel g wiegt $^1/4$ l Grieß?

c) Wieviel cm^3 nehmen 200 g Grieß ein?



Auf Meßbechern befinden sich Doppelskalen für verschiedene Lebensmittel. Mit ihnen wird die **proportionale Funktion**

Volumen → Masse

für das jeweilige Lebensmittel dargestellt. Die Schülerinnen und Schüler sollen die zusammengehörigen Größen an der **Skala** erkennen.

5. Aufgabe: a) Lies von der Skala für Grieß die in der Tabelle fehlenden Werte ab und trage sie ein. Berechne die Quotienten. Was ergibt sich?
b) Der Quotient gibt die Dichte von Grieß an. Welchen Näherungswert kann man aus der Tabelle ablesen?

Volumen	cm^3	1000	250		750	
Masse	g	800		400		500
$\frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}$	$\frac{g}{cm^3}$					

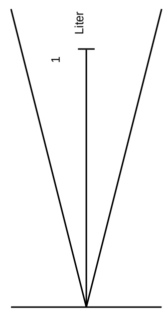
Die Aufgabe spricht die **Quotientenkonstanz** proportionaler Funktionen an. Diese soll an einer **Tabelle** erkannt werden.
Die Schülerinnen und Schüler sollen an die **physikalische Deutung** des Quotienten erinnert werden:

$$\text{Dichte} = \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}$$

6. Aufgabe: a) Gib eine Formel an, die den Zusammenhang zwischen dem Volumen V und der Masse m für Grieß beschreibt.
b) Berechne die Masse von 200 cm^3, 650 cm^3, 850 cm^3 Grieß.
c) Wieviel cm^3 sind 300 g, 250 g, 750 g Grieß?
Diese Aufgabe soll durch **Umformen der Formel** und durch **Einsetzen** gelöst werden.

2. Analyse eines kegelförmigen Meßbechers

1. Aufgabe: a) Die Füllhöhe bei 1 l beträgt für den dargestellten kegelförmigen Meßbecher 20 cm. Wie groß ist dort der lichte Durchmesser des Meßbechers?
b) Schätze, in welcher Höhe die Markierung für ½ l liegt. Weshalb kann sie nicht bei der Hälfte liegen?



Aus der **Volumenformel** für den Kegel

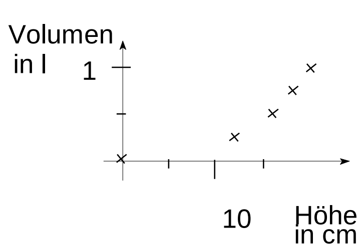
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

kann man bei gegebenem V = 1 l = 1000 cm^3 und h = 20 cm den Radius r und daraus den gesuchten Durchmesser d bestimmen. Mit wachsender Höhe wächst das Volumen immer stärker. Die Markierung zu ½ l muß also deutlich über der Hälfte der Strecke liegen.
In den folgenden Aufgaben wird diese Problematik etwas eingehender angesprochen.

2. Aufgabe: Für den kegelförmigen Meßbecher sind einige Punkte des Graphen der Funktion

Füllhöhe $\rightarrow$ *Volumen*

im Schaubild dargestellt.
a) Zeichne ein entsprechendes Schaubild und verbinde die Punkte.
b) Lies am Schaubild ab: Um wieviel cm steigt der Wasserspiegel, wenn das Wasser 5 cm bzw. 15 cm hoch steht und man 50 cm^3 hinzu gießt?



Hier wird nun für den Meßbecher die **Funktion**

Füllhöhe $\rightarrow$ *Volumen*

betrachtet. Von ihre wird eine **Darstellung im Schaubild** gegeben.
a) Die Schülerinnen sollen selbst ein entsprechendes Schaubild zeichnen und durch **Interpolation** den Graphen zeichnen.
b) Der **Graph** soll zu einer Problemlösung herangezogen werden.
Beim Eichen eines Gefäßes bestimmt man allerdings zu bekanntem Volumen jeweils die Füllhöhe. Das entspricht der Funktion

Volumen $\rightarrow$ *Füllhöhe*.

3. Aufgabe: Man kann sich den 1 l-Kegel auf den ½ l-Kegel durch eine räumliche zentrische Streckung abgebildet denken.
a) Gib den Streckfaktor an. Bestimme mit dem Taschenrechner einen Näherungswert.
b) Berechne damit, wie hoch ½ l Wasser in dem Meßbecher steht.
c) Berechne wie hoch das Wasser bei $^1/4$ l und bei $^3/4$ l Wasser steht.
Der 1 l-Kegel und der ½ l-Kegel sollen als zueinander **ähnliche Körper** gesehen werden. Für das Volumen V und das Bildvolumen V' gilt beim Streckfaktor k:

$$V' = k^3 V.$$

Für das Volumen V des 1 l-Körpers und das Volumen V' des ½ l-Körpers gilt

$$V' = 0,5\ V.$$

Also folgt:

$$k = \sqrt[3]{0,5} » 0,8.$$

Daraus kann man die gesuchte Höhe für das Volumen von ½ l bestimmen. Für $^1/4$ l ist der Streckfaktor

$$\sqrt[3]{0,25} » 0,6$$

und für $^3/4$ l ist es

$$\sqrt[3]{0,75} » 0,9$$

jeweils bezogen auf 1 l.

3. Eichung einer bauchigen Vase als Meßbecher

1. Aufgabe: a) Nimm eine bauchige Vase, die etwa 1 l Wasser faßt. Schütte nacheinander immer wieder 100 cm^3 Wasser hinzu und markiere die Stellung der Wasseroberfläche am Rand.
b) Miß mit der geeichten Vase ½ l Wasser ab und schütte die Flüssigkeit in einen Meßbecher. Kontrolliere das Ergebnis.

2. Aufgabe: a) Miß an der Vase die Füllhöhen zu den markierten Rauminhalten. Trage die Ergebnisse in einer Tabelle ein.
b) Stelle in einem Schaubild die Funktion *Füllhöhe* $\rightarrow$ *Volumen* dar. Wie erklärst du den Verlauf des Graphen?

In diesen Aufgaben sollen die Schülerinnen und Schüler in **Eigentätigkeit** eine bauchige Vase als Meßbecher eichen. Dabei sollen ihnen die unregelmäßigen Abstände der Meßpunkte auf der **Skala** und die Ursachen dafür bewußt werden.

4. Teelöffel - Eßlöffel - Tasse

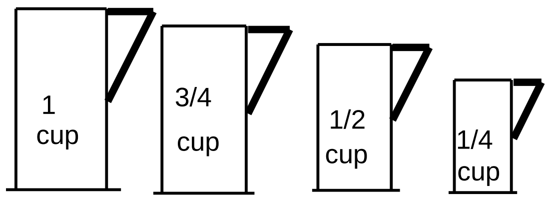
1. Aufgabe: In Rezepten liest man Angaben wie:
1 Teelöffel Zucker
1 Eßlöffel Mehl
1 Tasse Wasser.
a) Wie beurteilst du diese Maßangaben?
b) Miß mit der Briefwaage, um wieviel g es sich dabei handelt.

In dieser Aufgabe sollen sich die Schülerinnen mit Maßangaben auseinandersetzen, die sich in Rezepten finden und nicht genau festgelegt sind. Sie sollen für einige von ihnen selbst die Maße in cm^3 bestimmen.
Experimentell sollen sie dann die Dichten einiger Lebensmittel selbst bestimmen.

2. Aufgabe: a) Bestimme mit einem Meßbecher, wieviel cm^3 eine Tasse Wasser ist.
b) Wiege ab, wieviel g Zucker, wieviel g Mehl, wieviel g Grieß in eine Tasse passen.
c) Bestimme die Dichten von Zucker, Mehl und Grieß.
Die Aufgabe ist recht **offen** formuliert. So bleibt z.B. unklar, ob „gestrichene“ oder „gehäufte“ Löffel gemeint sind. Das sollte Anlaß zu weiteren Überlegungen geben.

5. Ähnliche Meßbecher

Aufgabe: In einem Antiquitätengeschäft wird ein Satz mit 4 zylindrischen Messingbechern angeboten, die 1 cup, $^{3}/4$ cup, ½ cup und $^{1}/4$ cup enthalten.
Das Besondere daran ist, daß die Zylinder alle zueinander ähnlich sind.



a) Das 1 cup-Gefäß hat einen Innendurchmesser von 5 cm und eine innere Höhe von 10 cm. Wieviel cm^3 ist 1 cup?
b) Mit welchem Faktor sind Durchmesser und Höhe zu multiplizieren, wenn sich das Volumen halbieren soll? Bestimme die Maße des ½cup-Gefäßes.
c) Bestimme auch die Maße des $^{1}/4$ cup-Bechers und des $^{3}/4$ cup-Bechers.
d) Stelle selbst solche Becher aus Zeichenkarton her.

Die Aufgabe soll die Schülerinnen und Schüler daran erinnern, wie sich die Volumina **zueinander ähnlicher Körper** verhalten. Mit den Angaben für den 1. Becher sind die Maße der anderen Becher festgelegt.